ボーズ分布関数・フェルミ分布関数の導出

全エネルギーＥと全粒子数Ｎは

$$E=\sum_i \varepsilon_i N_i \cdots\cdot ① \qquad N=\sum_i N_i \cdots\cdot ②$$

①②の条件を満たしつつエントロピーＳを最大にすることを考える。

$$S=k\log W \cdots\cdot ③$$

＜フェルミ粒子＞

区別のつかない N 個の粒子を、重なりを許さずに G_i 個の状態に N_i 個の粒子を分配する方法 P_i は

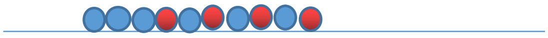
★G_i 個の箱から N_i 個の箱を選び出す場合の数に相当する。

$$G_i!=P_i(G_i-N_i)!N_i! \qquad P_i=\frac{G_i!}{(G_i-N_i)!N_i!} \qquad W_f=\prod_i \frac{G_i!}{(G_i-N_i)!N_i!} \cdots\cdot ④$$

＜ボーズ粒子＞

区別のつかない N 個の粒子を、重なりを許して G_i 個の状態に N_i 個の粒子を分配する方法 P_i は

★N_i 個の粒子の間に（G_i－１）個の間仕切りを置く順列の場合の数に相当する。



$$P_i(G_i-1)!N_i!=(N_i+G_i-1)! \qquad P_i=\frac{(N_i+G_i-1)!}{(G_i-1)!N_i!} \qquad W_b=\prod_i \frac{(N_i+G_i-1)!}{(G_i-1)!N_i!} \cdots\cdot ⑤$$

スターリングの公式　　$\log M!=M\log M-M$

G_i と N_i は、１より十分に大きな値であり１は分母、分子の計算には影響を与えないと考えられる。

＜ボーズ粒子＞について

$$\log W_b=\log\prod_i \frac{(N_i+G_i-1)!}{(G_i-1)!N_i!}=\sum_i\{\log(N_i+G_i-1)!-\log(G_i-1)!-\log N_i!\}$$

$$=\sum_i\{(N_i+G_i)\log(N_i+G_i)-(N_i+G_i)-G_i\log G_i+G_i-N_i\log N_i+N_i\}$$

$$=\sum_i\{(N_i+G_i)\log(N_i+G_i)_i-G_i\log G_i-N_i\log N_i\}\cdot\cdot ⑥$$

$N_i\to N_i+\delta N_i$ の変分を考える。

$$\delta\left[(N_i+G_i)\log(N_i+G_i)_i-G_i\log G_i-N_i\log N_i\right]$$

$$=\left[(\{N_i+\delta N_i\}+G_i)\log(\{N_i+\delta N_i\}+G_i)_i-G_i\log G_i-\{N_i+\delta N_i\}\log\{N_i+\delta N_i\}\right]$$

$$-\left[(N_i+G_i)\log(N_i+G_i)-G_i\log G_i-N_i\log N_i\right]$$

$$=(\{N_i+\delta N_i\}+G_i)\log(\{N_i+\delta N_i\}+G_i)-\{N_i+\delta N_i\}\log\{N_i+\delta N_i\}-(N_i+G_i)\log(N_i+G_i)+N_i\log N_i\cdots ⑦$$

$$(\{N_i+\delta N_i\}+G_i)\log(\{N_i+\delta N_i\}+G_i)=(\{N_i+\delta N_i\}+G_i)\log(N_i+G_i+\delta N_i)$$

$$=(\{N_i+\delta N_i\}+G_i)\log(N_i+G_i)\left(1+\frac{\delta N_i}{(N_i+G_i)}\right)$$

$$=(\{N_i+G_i\}+\delta N_i)\log(N_i+G_i)+(\{N_i+G_i\}+\delta N_i)\log\left(1+\frac{\delta N_i}{(N_i+G_i)}\right)$$

$$=(\{N_i+G_i\})\log(N_i+G_i)+(\delta N_i)\log(N_i+G_i)+(N_i+G_i)\left(\frac{\delta N_i}{(N_i+G_i)}\right)+(\delta N_i)\left(\frac{\delta N_i}{(N_i+G_i)}\right)$$

$$=(N_i+G_i)\log(N_i+G_i)+\delta N_i\log(N_i+G_i)+\delta N_i\cdots ⑧$$

$$\delta[(N_i+G_i)\log(N_i+G_i)_i-G_i\log G_i-N_i\log N_i]=\delta N_i\log(N_i+G_i)+\delta N_i-(N_i+\delta N_i)\log(N_i+\delta N_i)+N_i\log N_i$$

$$=\delta N_i\log(N_i+G_i)+\delta N_i-(N_i+\delta N_i)\log N_i\left(1+\frac{\delta N_i}{N_i}\right)+N_i\log N_i$$

$$=\delta N_i\log(N_i+G_i)+\delta N_i-(N_i+\delta N_i)\log N_i-(N_i+\delta N_i)\log\left(1+\frac{\delta N_i}{N_i}\right)+N_i\log N_i$$

$$=\delta N_i\log(N_i+G_i)+\delta N_i-(N_i+\delta N_i)\log N_i-(N_i+\delta N_i)\left(\frac{\delta N_i}{N_i}\right)+N_i\log N_i$$

$$=\delta N_i\log(N_i+G_i)+\delta N_i-N_i\log N_i-\delta N_i\log N_i-(N_i)\left(\frac{\delta N_i}{N_i}\right)-(\delta N_i)\left(\frac{\delta N_i}{N_i}\right)+N_i\log N_i$$

$$=\delta N_i\log(N_i+G_i)+\delta N_i-N_i\log N_i-\delta N_i\log N_i-\delta N_i-(\delta N_i)\left(\frac{\delta N_i}{N_i}\right)+N_i\log N_i$$

$$=\delta N_i\log(N_i+G_i)-\delta N_i\log N_i$$

$$=\delta N_i(\log(N_i+G_i)-\log N_i)\cdots ⑨$$

$$\delta(\log W_b)=\sum_i(\log(N_i+G_i)-\log N_i)\delta N_i\cdots ⑩$$

$$\delta E=\sum_i\varepsilon_i\delta N_i=0\cdots\cdot ⑪ \qquad \delta N=\sum_i\delta N_i=0\cdots\cdot ⑫$$

⑪⑫の条件を満たしながら⑩が 0 でなければならないのでラグランジュの未定常数法より α、β を任意の定数とすると、⑩－α×⑫－β×⑪を作ると

$$\delta(\log W_b)=\sum_i(\log(N_i+G_i)-\log N_i-\beta\varepsilon_i-\alpha)\delta N_i=0\cdots\cdot ⑬$$

$$(\log(N_i+G_i)-\log N_i-\beta\varepsilon_i-\alpha)=0\cdots\cdot ⑭$$

$$\left(\log\frac{(N_i+G_i)}{N_i}-\beta\varepsilon_i-\alpha\right)=\left(\log\left(1+\frac{G_i}{N_i}\right)-\beta\varepsilon_i-\alpha\right)=0$$

$$\log\left(1+\frac{G_i}{N_i}\right)=\beta\varepsilon_i+\alpha \qquad 1+\frac{G_i}{N_i}=\exp(\beta\varepsilon_i+\alpha) \qquad \frac{G_i}{N_i}=\exp(\alpha+\beta\varepsilon_i)-1$$

$$\frac{N_i}{G_i}=\frac{1}{\exp(\alpha+\beta\varepsilon_i)-1}\cdots\cdot ⑮$$ ボーズ・アインシュタイン分布

＜フェルミ粒子＞について

$$\log W_f=\log\prod_i\frac{G_i!}{(G_i-N_i)!N_i!}=\sum_i\{\log G_i!-\log(G_i-N_i)!-\log N_i!\}$$

$$=\sum_i\{G_i\log G_i-G_i-(G_i-N_i)\log(G_i-N_i)+(G_i-N_i)-N_i\log N_i+N_i\}$$

$$=\sum_i\{G_i\log G_i-(G_i-N_i)\log(G_i-N_i)-N_i\log N_i\}\cdots ⑯$$

$$\delta[G_i\log G_i-(G_i-N_i)\log(G_i-N_i)-N_i\log N_i]$$
$$=[G_i\log G_i-(G_i-\{N_i+\delta N_i\})\log(G_i-\{N_i+\delta N_i\})-\{N_i+\delta N_i\}\log\{N_i+\delta N_i\}]-[G_i\log G_i-(G_i-N_i)\log(G_i-N_i)-N_i\log N_i]$$

$$[G_i \log G_i - (\{G_i - N_i\} - \delta N_i)\log(\{G_i - N_i\} - \delta N_i) - \{N_i + \delta N_i\}\log\{N_i + \delta N_i\}]$$
$$= G_i \log G_i - (G_i - N_i)\log(G_i - N_i)\left(1 - \frac{\delta N_i}{(G_i - N_i)}\right) + \delta N_i \log(G_i - N_i)\left(1 - \frac{\delta N_i}{(G_i - N_i)}\right) - N_i \log N_i\left(1 + \frac{\delta N_i}{N_i}\right) - \delta N_i \log N_i\left(1 + \frac{\delta N_i}{N_i}\right)$$
$$= G_i \log G_i - (G_i - N_i)\log(G_i - N_i) - (G_i - N_i)\log\left(1 - \frac{\delta N_i}{(G_i - N_i)}\right) + \delta N_i \log(G_i - N_i) + \delta N_i \log\left(1 - \frac{\delta N_i}{(G_i - N_i)}\right)$$
$$- N_i \log N_i\left(1 + \frac{\delta N_i}{N_i}\right) - \delta N_i \log N_i - \delta N_i \log\left(1 + \frac{\delta N_i}{N_i}\right)$$
$$= G_i \log G_i - (G_i - N_i)\log(G_i - N_i) + (G_i - N_i)\left(\frac{\delta N_i}{(G_i - N_i)}\right) + \delta N_i \log(G_i - N_i) - \delta N_i\left(\frac{\delta N_i}{(G_i - N_i)}\right)$$
$$- N_i \log N_i - N_i \log\left(1 + \frac{\delta N_i}{N_i}\right) - \delta N_i \log N_i - \delta N_i\left(\frac{\delta N_i}{N_i}\right)$$
$$= G_i \log G_i - (G_i - N_i)\log(G_i - N_i) + \delta N_i + \delta N_i \log(G_i - N_i) + \delta N_i\left(\frac{\delta N_i}{(G_i - N_i)}\right) - N_i \log N_i - \delta N_i - \delta N_i \log N_i - \delta N_i\left(\frac{\delta N_i}{N_i}\right)$$
$$= G_i \log G_i - (G_i - N_i)\log(G_i - N_i) + \delta N_i + \delta N_i \log(G_i - N_i) - N_i \log N_i - \delta N_i \log N_i - \delta N_i$$
$$= [G_i \log G_i - (G_i - N_i)\log(G_i - N_i) + \delta N_i \log(G_i - N_i) - N_i \log N_i - \delta N_i \log N_i]$$

$$\delta[G_i \log G_i - (G_i - N_i)\log(G_i - N_i) - N_i \log N_i]$$
$$= [G_i \log G_i - (G_i - N_i)\log(G_i - N_i) + \delta N_i \log(G_i - N_i) - N_i \log N_i - \delta N_i \log N_i] - [G_i \log G_i - (G_i - N_i)\log(G_i - N_i) - N_i \log N_i]$$
$$= [\delta N_i \log(G_i - N_i) - \delta N_i \log N_i]$$
$$= [\log(G_i - N_i) - \log N_i]\delta N_i \cdots ⑰$$

⑪⑫の条件を満たしながら⑩が 0 でなければならないのでラグランジュの未定常数法よりα、βを任意の定数とすると、⑰－α×⑫－β×⑪を作ると

$$\delta(\log W_f) = \sum_i (\log(G_i - N_i) - \log N_i - \beta\varepsilon_i - \alpha)\delta N_i = 0 \cdots ⑱$$

$$\log(G_i - N_i) - \log N_i - \beta\varepsilon_i - \alpha = 0 \qquad \log(G_i - N_i) - \log N_i = \beta\varepsilon_i + \alpha$$

$$\log\frac{(G_i - N_i)}{N_i} = \beta\varepsilon_i + \alpha \qquad \log\left(\frac{G_i}{N_i} - 1\right) = \beta\varepsilon_i + \alpha \qquad \frac{G_i}{N_i} - 1 = \exp[\beta\varepsilon_i + \alpha] \qquad \frac{G_i}{N_i} = \exp[\beta\varepsilon_i + \alpha] + 1$$

$$\frac{N_i}{G_i} = \frac{1}{\exp[\alpha + \beta\varepsilon_i] + 1}$$

フェルミ・ディラック分布