δ関数の活用

2022.4.25

鹿児島現代物理勉強会

御領　悟志

δ関数の定義（１）

$x \neq 0$　のとき　$\delta(x)=0$　で

$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$　である関数を

デルタ関数という。

（1）性質

$x \neq 0$　のとき　$\delta(x)=0$　なので

$f(x)\delta(x)=f(0)\delta(x)$　$\cdots$①

$x=0$　のときも定義から

$f(x)\delta(x)=f(0)\delta(x)$　$\cdots$②

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(0)\delta(x)dx$$

$$= f(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = f(0) \quad \cdots ③$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0) \quad \cdots ③}$$

$\xi = x-a$　　$x=\xi+a$　　$d\xi = dx$　なので

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi+a)\delta(\xi)d\xi = f(0+a) = f(a)$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a) \quad \cdots ④}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\delta(x)dx = 0 \quad \cdots ⑤$$

なので　$x\delta(x)=0$　$\cdots$⑥

δ関数の定義（２）

$\delta(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$　とおくと　$\cdots$⑦

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\vec{r})d^3\vec{r} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\delta(y)\delta(z)dxdydz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx\int_{-\infty}^{\infty}\delta(y)dy\int_{-\infty}^{\infty}\delta(z)dz = 1 \quad \cdots ⑧$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y,z)\delta(x)\delta(y)\delta(z)dxdydz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(0,y,z)\delta(y)\delta(z)dydz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}f(0,0,z)\delta(z)dz = f(0,0,0)$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y,z)\delta(x)\delta(y)\delta(z)dxdydz = f(0,0,0) \cdots ⑨$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y,z)\delta(x-a)\delta(y-b)\delta(z-c)dxdydz \quad \cdots ⑩$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(a,y,z)\delta(y-b)\delta(z-c)dydz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}f(a,b,z)\delta(z-c)dz = f(a,b,c)$$

$$\boxed{\therefore \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y,z)\delta(x-a)\delta(y-b)\delta(z-c)dxdydz = f(a,b,c) \quad \cdots ⑪}$$

δ関数の定義（3）

フーリエ変換より

$$F(k)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx \quad \cdots ⑫$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx}dk \quad \cdots ⑬$$

$f(x)=\delta(x)$ とおくと　$\cdots$⑭

$$F(k)=\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)e^{-ikx}dx \quad \cdots ⑮$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}\delta(x)dx = e^{-ik0}=1 \quad \cdots ⑯$$

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}dk \quad \cdots ⑰$$

δ関数の定義（4）

$x\delta(x)=0$ なので

$$(x-x')\delta(x-x')=0 \quad \cdots①$$

$$x\delta(x-x')=x'\delta(x-x') \quad \cdots②$$

位置の固有関数は

$$x\varphi_{x'}=x'\varphi_{x'} \quad \cdots③$$

$$\therefore \varphi_{x'}=\delta(x-x') \quad \cdots④$$

$$(\varphi_{x'},\varphi_{x''})=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x')\delta(x-x'')dx \quad \cdots⑤$$

$$\therefore (\varphi_{x'},\varphi_{x''})=\delta(x''-x') \quad \cdots⑥$$

3次元まで拡張すると

$$\delta(\vec{r})=\delta(x)\delta(y)\delta(z)$$

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}')=\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')$$

$$x\delta(x-x')=x'\delta(x-x')$$

$$y\delta(y-y')=y'\delta(y-y')$$

$$z\delta(z-z')=z'\delta(z-z')$$

$$\therefore \vec{r}\delta(\vec{r}-\vec{r}')=\vec{r}'\delta(\vec{r}-\vec{r}') \quad \cdots⑦$$

$$\varphi_{\vec{r}'}=\delta(\vec{r}-\vec{r}') \quad \cdots⑧$$

δ関数の定義（5）

3次元まで拡張すると

$$\left(\varphi_{\vec{r}'}, \varphi_{\vec{r}''}\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\vec{r} - \vec{r}')\delta(\vec{r} - \vec{r}'')d^3\vec{r}$$

$$\therefore \quad \left(\varphi_{\vec{r}'}, \varphi_{\vec{r}''}\right) = \delta(\vec{r}'' - \vec{r}') \quad \cdots ⑩$$

連続固有値の場合の固有関数の規格化直交系がデルタ関数で表される。