

グリーン関数

2020.9.3現在

鹿児島現代物理勉強会

御領 悟志

グリーン関数の定義

微分方程式の解 Φ が、グリーン関数を用いることにより積分計算で求められる。

$$\Omega G(\vec{r}) = \delta(\vec{r}) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\Omega \Phi(\vec{r}) = s(\vec{r}) \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成立するときに、グリーン関数 $G(\vec{r})$

を用いると②の解 $\Phi(\vec{r})$ は

$$\Phi(\vec{r}) = \int G(\vec{r} - \vec{r}') s(\vec{r}') d\vec{r}' \quad \cdots \textcircled{3}$$

と求められる。

(証明)

$$\Omega \Phi(\vec{r}) = \int \Omega G(\vec{r} - \vec{r}') s(\vec{r}') d\vec{r}' \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\Omega \Phi(\vec{r}) = \int s(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') d\vec{r}' = s(\vec{r}) \quad \cdots \textcircled{5}$$

∴

③で示される関数 $\Phi(\vec{r})$ は②を満たす。

微分方程式 → 積分方程式 への変更

グリーン関数の例(1)

$\Omega = (\nabla^2 - m^2)$ の場合

$$(\nabla^2 - m^2)G(\vec{r}) = \delta(\vec{r})$$

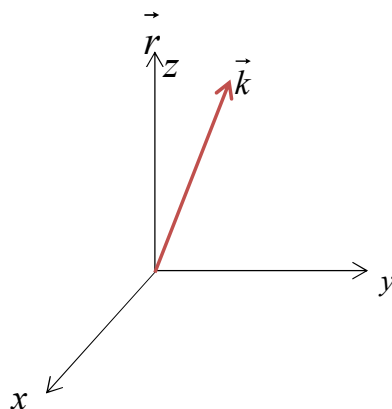
$$(\nabla^2 - m^2)\Phi(\vec{r}) = s(\vec{r})$$

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \tilde{G}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k}$$

$$(\nabla^2 - m^2)G(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \tilde{G}(\vec{k}) (\nabla^2 - m^2) e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k}$$

$$\delta(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \underbrace{\tilde{G}(\vec{k}) (-\vec{k}^2 - m^2)}_1 e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k}$$

$$\therefore \tilde{G}(\vec{k}) = -\frac{1}{\vec{k}^2 + m^2}$$



$$G(\vec{r}) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{\vec{k}^2 + m^2} e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k}$$

$$d\vec{k} = k^2 dk \sin \theta d\theta d\phi$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{1}{k^2 + m^2} e^{ikr \cos \theta} k^2 \sin \theta$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \int_0^\pi d\theta \frac{k^2}{k^2 + m^2} e^{ikr \cos \theta} \sin \theta$$

$$t = \cos \theta \quad dt = -\sin \theta d\theta \quad \sin \theta d\theta = -dt$$

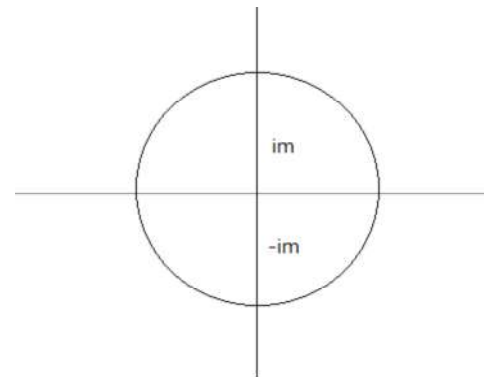
$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \int_1^{-1} dt \frac{k^2}{k^2 + m^2} e^{ikrt}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{k^2 + m^2} \left[\frac{e^{ikrt}}{ikr} \right]_1^{-1}$$

グリーン関数の例(2)

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{k^2}{k^2 + m^2} \left(\frac{e^{-ikr} - e^{ikr}}{ikr} \right) dk \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{k}{k^2 + m^2} \left(\frac{e^{-ikr} - e^{ikr}}{ir} \right) dk \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \left\{ \int_0^\infty \frac{k}{k^2 + m^2} \frac{e^{-ikr}}{ir} dk - \int_0^\infty \frac{k}{k^2 + m^2} \frac{e^{ikr}}{ir} dk \right\} \\
 &k = -\xi \text{ とおく。 } dk = -d\xi \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \left\{ \int_0^{-\infty} \frac{\xi}{\xi^2 + m^2} \frac{e^{i\xi r}}{ir} d\xi - \int_0^\infty \frac{k}{k^2 + m^2} \frac{e^{ikr}}{ir} dk \right\} \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \left\{ - \int_{-\infty}^0 \frac{\xi}{\xi^2 + m^2} \frac{e^{i\xi r}}{ir} d\xi - \int_0^\infty \frac{k}{k^2 + m^2} \frac{e^{ikr}}{ir} dk \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G(\vec{r}) &= - \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^\infty \frac{k}{k^2 + m^2} \frac{e^{ikr}}{ir} dk \\
 &= \frac{i}{(2\pi)^2} \frac{1}{r} \int_{-\infty}^\infty \frac{ke^{ikr}}{k^2 + m^2} dk
 \end{aligned}$$



留数定理を用いる。上半分の周回について積分する。

グリーン関数の例(3)

$$\begin{aligned}
 &= \frac{i}{(2\pi)^2} \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k-im} + \frac{1}{k+im} \right) e^{ikr} dk \\
 &= \frac{i}{(2\pi)^2} \frac{1}{r} 2\pi i \cdot \mathbf{Res}[im] = \frac{i}{(2\pi)^2} \frac{1}{r} 2\pi i \frac{1}{2} e^{imr} \\
 &= -\frac{1}{4\pi r} e^{-mr}
 \end{aligned}$$

ここで極の位置を原点に近づける。 $m \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
 G(\vec{r}) &= -\frac{1}{4\pi r} \\
 s(\vec{r}) &= -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \text{ ならば}
 \end{aligned}$$

$$\Phi(\vec{r}) = \int G(\vec{r} - \vec{r}') s(\vec{r}') d\vec{r}' \cdots \textcircled{3}$$

$$G(\vec{r} - \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi \left| \vec{r} - \vec{r}' \right|}$$

$$\Phi(\vec{r}) = \int \left(-\frac{1}{4\pi \left| \vec{r} - \vec{r}' \right|} \right) \left(-\frac{\rho(\vec{r}')}{\varepsilon_0} \right) d\vec{r}'$$

$$\Phi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0 \left| \vec{r} - \vec{r}' \right|} d\vec{r}'$$

空間に点状電荷により、電位のポテンシャルが求められることを示す。

グリーン関数の定義(その2)

$$D_x \Phi(x) = f(x) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$D_x G(x-y) = -i\delta(x-y) \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\Phi(x) = i \int dy G(x-y) f(y) + \Phi_{\text{hom}}(x) \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$D_x \Phi(x)_{\text{hom}} = 0 \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$D_x \Phi(x) = i \int dy \underbrace{D_x G(x-y)}_{-i\delta(x-y)} f(y) + \underbrace{D_x \Phi_{\text{hom}}(x)}_0 \quad \cdots \textcircled{5}$$

$$D_x \Phi(x) = \int dy \delta(x-y) f(y) = f(x) \quad \cdots \textcircled{6}$$

$$\square = \sum_{\mu} \partial^{\mu} \partial_{\mu} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

$$(\square_x + m^2)G(x-y) = -i\delta^{(4)}(x-y)$$

$$G(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} \tilde{G}(p)$$

$$(\square_x + m^2)G(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (\square_x + m^2) e^{-ip \cdot (x-y)} \tilde{G}(p)$$

$$-i\delta^{(4)}(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (-p^2 + m^2) e^{-ip \cdot (x-y)} \tilde{G}(p)$$

$$\delta^{(4)}(x-y) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (-p^2 + m^2) e^{-ip \cdot (x-y)} \tilde{G}(p)$$

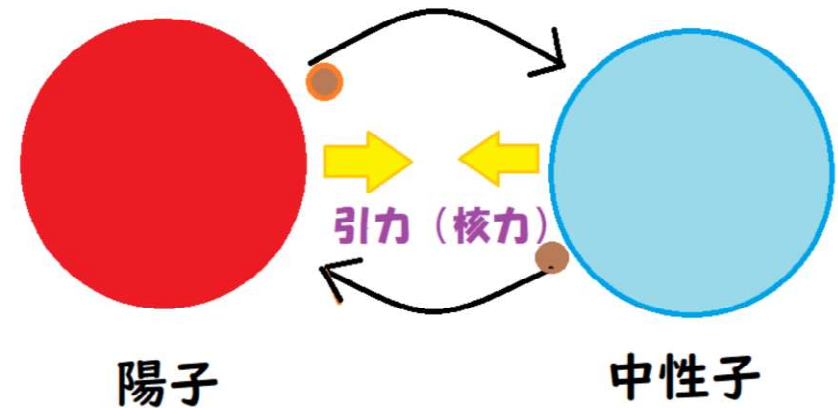
$$i \tilde{G}(p) (-p^2 + m^2) = 1$$

$$\tilde{G}(p) = \frac{1}{i(-p^2 + m^2)} = \frac{-i}{(-p^2 + m^2)} = \frac{i}{p^2 - m^2}$$

$$G(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} \frac{i}{(p^2 - m^2)}$$

中間子理論

- 原子核中の陽子と中性子間には、**核力**がはたらく。
- 陽子・中性子の核子間では**中間子(メソン)**が交換される。
- 力を、粒子が媒介する。
(基本原理)
- **湯川秀樹**により提唱された。
(1935年)
- 初めての学位論文が、ノーベル賞対象論文となる。**日本人初**。



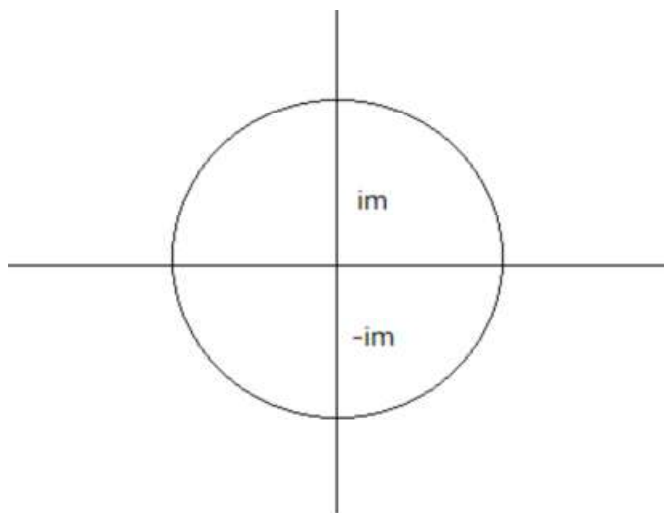
**中間子を交換(キャッチボール)
することで核力が発生する。**

中間子場の方程式を解いて湯川ポテンシャルを導くときに、グリーン関数を用います。

補遺(留数定理など)

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz$$

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i b_1 = 2\pi i \operatorname{Re} s(z_0)$$



$$\nabla = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\Delta = \nabla^2$$

$$\begin{aligned} &= \left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned}$$

