ゲージ変換(理論）について

2019.10.28

鹿児島現代物理勉強会

御領　悟志

Ⅰ．ゲージ変換

電磁場の存在しない自由空間における電子のラグラジアンは、（自然単位系$\hbar = c = 1$で議論する）

$$\mathfrak{L} = \bar{\psi}(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{L} = i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi \qquad \cdots ①$$

$$\psi \Rightarrow \quad \exp(i\theta(x_{\nu}))\psi$$

$$\bar{\psi} = \psi^{\dagger}\gamma^{0} \qquad \bar{\psi} \Rightarrow \quad \exp(-i\theta(x_{\nu}))\bar{\psi}$$

$$\bar{\psi} = \begin{bmatrix} \psi_1^* & \psi_2^* & \psi_3^* & \psi_4^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1^* & \psi_2^* & -\psi_3^* & -\psi_4^* \end{bmatrix}$$

$\psi \Rightarrow \exp(i\theta)\psi$　とすると　ここでθは定数

$$\mathfrak{L} = i\exp(-i\theta)\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\exp(i\theta)\psi - m\exp(-i\theta)\bar{\psi}\exp(i\theta)\psi$$

$$= i\exp(-i\theta)\exp(i\theta)\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\exp(-i\theta)\exp(i\theta)\bar{\psi}\psi = i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi$$

∴　グローバル位相変換（4次元時空全ての点でθだけ共通に回転させる）では不変となる。

スピノル場の位相θが定数でなくx_{ν}の実関数として$\theta = \theta(x_{\nu})$のとき

$\psi \Rightarrow \exp(i\theta(x_{\nu}))\psi$　・・・②の変換を考える。→ローカルゲージ変換（位相を時空間各点で独立に回転）

①のラグラジアンに②を代入すると

$$\mathfrak{L} = i\exp[-i\theta(x_{\nu})]\bar{\psi}\gamma^{\mu}\exp[i\theta(x_{\nu})]\partial_{\mu}\psi - m\exp[-i\theta(x_{\nu})]\bar{\psi}\exp[i\theta(x_{\nu})]\psi + i\exp[-i\theta(x_{\nu})]\bar{\psi}\gamma^{\mu}(\partial_{\mu}\theta(x_{\nu}))\exp[-i\theta(x_{\nu})]\psi$$

$$= i\exp[-i\theta(x_{\nu})]\bar{\psi}\gamma^{\mu}\exp[i\theta(x_{\nu})]\partial_{\mu}\psi - m\exp[-i\theta(x_{\nu})]\bar{\psi}\exp[i\theta(x_{\nu})]\psi + ii\exp[-i\theta(x_{\nu})]\bar{\psi}\gamma^{\mu}(\partial_{\mu}\theta(x_{\nu}))\exp[-i\theta(x_{\nu})]\psi$$

$$= i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi - (\partial_{\mu}\theta(x_{\nu}))\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$$

$$\mathfrak{L} \Rightarrow \mathfrak{L} - (\partial_{\mu}\theta(x_{\nu}))\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi \qquad \cdots ③$$

となり、ラグラジアンは不変ではない。

∴　自由場のディラック・ラグラジアンはローカルゲージ対称性を持たない。

ここでローカルゲージ対称性を持つように、新たなゲージ場$A_{\mu}(x^{\nu})$を導入する。

また微分を次のように変更

$$\partial_{\mu} \Rightarrow D_{\mu} = \partial_{\mu} + iqA_{\mu} \cdots ③$$

また、$A_{\mu} \Rightarrow A_{\mu} - \dfrac{1}{q}\partial_{\mu}\theta(x^{\nu}) \cdots ④$

位相は任意の実関数$\theta = \theta(x_{\nu})$　なので電子の電荷の大きさに比例した関数と定義すると

$\theta(x_\nu) = qA(x_\nu)$ で、ゲージ場は

$$A_\mu \Rightarrow A_\mu - \frac{1}{q}\partial_\mu qA(x^\nu) = A_\mu - \partial_\mu A(x^\nu) \cdots ⑤$$

$$D_\mu\psi \Rightarrow \left[\partial_\mu + iq\left(A_\mu - \partial_\mu A(x^\nu)\right)\right]\exp[iqA(x^\nu)]\psi \cdots ⑥$$

$$= \partial_\mu \exp[iqA(x^\nu)]\psi + iq\left(A_\mu - \partial_\mu A(x^\nu)\right)\exp[iqA(x^\nu)]\psi$$

$$= iq\partial_\mu A(x^\nu)\exp[iqA(x^\nu)]\psi + \exp[iqA(x^\nu)]\partial_\mu\psi + iq\left(A_\mu - \partial_\mu A(x^\nu)\right)\exp[iqA(x^\nu)]\psi$$

$$= \exp[iqA(x^\nu)]\partial_\mu\psi + iqA_\mu \exp[iqA(x^\nu)]\psi$$

$$= \exp[iqA(x^\nu)]\left(\partial_\mu + iqA_\mu\right)\psi$$

$$= \exp[iqA(x^\nu)]D_\mu\psi \cdots ⑦$$

$$D_\mu\left(\exp[iqA(x^\nu)]\psi\right) = \exp[iqA(x^\nu)]D_\mu\psi \cdots ⑧$$

$$\mathfrak{L} = i\exp[-iqA(x^\nu)]\overline{\psi}\gamma^\mu D_\mu \exp[iqA(x^\nu)]\psi - m\exp[-iqA(x^\nu)]\overline{\psi}\exp[iqA(x^\nu)]\psi$$

$$= i\exp[-iqA(x^\nu)]\overline{\psi}\gamma^\mu \exp[iqA(x^\nu)]D_\mu\psi - m\exp[-iqA(x^\nu)]\overline{\psi}\exp[iqA(x^\nu)]\psi$$

$$= i\overline{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\overline{\psi}\psi$$

$\mathfrak{L} = \overline{\psi}\left(i\gamma^\mu D_\mu - m\right)\psi \cdots ⑦$ で、ローカルゲージ変換で不変である・

$$\mathfrak{L} = \overline{\psi}\left(i\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) - m\right)\psi$$

$$\mathfrak{L} = \overline{\psi}\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi - \left(q\overline{\psi}\gamma^\mu\psi\right)A_\mu \cdots ⑨$$

⑨式の　第３項 $-\left(q\overline{\psi}\gamma^\mu\psi\right)A_\mu$ は、ゲージ場 A_μ　とスピノル場 ψ　が結合定数 $-q$

の強さで相互作用することを意味する。