平成 27 年度　京都大学大学院入試　抜粋

II-1 (力学) (100 点)

(1) x の関数 $y(x)$ に対して $y' = \dfrac{dy}{dx}$ と書く事にする．y と y' の関数 $L(y, y')$ に対して積分

$$T = \int_a^b L(y, y')dx \tag{A}$$

を考える．T の y について変分がゼロになるような y の従う微分方程式を書け．ただし $\delta y(a) = 0, \delta y(b) = 0$ とする．

(2) $y(x)$ が問 (1) で求めた微分方程式の解であるとき

$$\frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial L}{\partial y'} - L\right) \tag{B}$$

を求めよ．

図 1 のような地球の表面上の点 P$(x = 0, y = 0)$ から，点 Q$(x = a, y = 0)$ まで，地下のトンネルを通って，列車で移動できる様にする事を考える．質量 m の列車は重力のみで加速と減速を受け抵抗ゼロで走れるとする．また，地球の表面は平面とし，重力ポテンシャルエネルギーは $g > 0$ を一定として，mgy で書けるとする．点 P から最も早く点 Q に到着するには，いかなる経路 $y(x)$ のトンネルを掘れば良いかを，以下のようにして求めよう．

(3) 点 P から速度ゼロで出発して点 (x, y) に到着した時の列車の速さ V を求めよ．

(4) $y(x)$ に沿って列車が進んだとき点 Q に達するまでの時間 T は，式 (A) の形に書ける．$y = y(x)$ に沿った長さ ds が $ds = \sqrt{1 + (y')^2}dx$ と書ける事に注意して $L(y, y')$ の具体的な表式を書け．

(5) 問 (2) の結果を積分して y' を y で表せ．

(6) $y' = -1/\tan\theta$ で新しい変数 θ を定義する．このとき θ の関数として $y(\theta)$ を求めよ．

(7) x も θ の関数 $x(\theta)$ と考えると

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dy}{d\theta}\frac{1}{y'} \tag{C}$$

となる．$x(\theta)$ は，この微分方程式を解く事により求める事ができる．$x = 0$ と $x = a$ で $y = 0$ となる条件から $x(\theta)$ を求めよ．

(8) トンネルで一番深い点の x 座標と y 座標を求めよ．

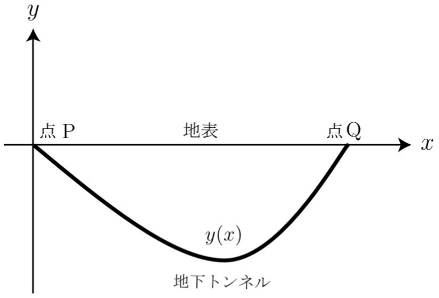

図 1

（９）最短の時間 T [s]を求めよ。

（１０） a =1.0×10^{6}m　g=9.8m/s^2 とするとき最短時間 T は何秒か。有効数字二桁で求めよ。

京都大学大学院入試問題の解答例
最速降下曲線　　変分原理の応用例
問１

$$T=\int_a^b L(y,y')dx$$

$$\delta L=L(y+\delta y,y'+\delta y')-L(y,y')$$

$$\delta T=\int_a^b\left(\frac{\partial L}{\partial y}\delta y+\frac{\partial L}{\partial y'}\delta y'\right)dx\cdots①$$

$$\delta y'=\delta\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}(\delta y)\cdots②$$

$$\delta T=\int_a^b\left(\frac{\partial L}{\partial y}\delta y+\frac{\partial L}{\partial y'}\frac{d}{dx}(\delta y)\right)dx=0$$

$$=\int_a^b\frac{\partial L}{\partial y}\delta y dx+\left[\frac{\partial L}{\partial y'}\delta y\right]_a^b-\int_a^b\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)\delta y dx=0$$

$$=\int_a^b\left(\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)\right)\delta y dx+\left[\frac{\partial L}{\partial y'}\delta y\right]_a^b=0$$

$$\delta y(a)=\delta y(b)=0$$

$$=\int_a^b\left(\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)\right)\delta y dx=0\cdots③$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)=0\cdots④$$

問２

$$\frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial L}{\partial y'}-L\right)$$

オイラーの式より

$$\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)=0$$

$$\frac{dy}{dx}\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{dy}{dx}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)=0\cdots⑤$$

$\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'}\right)=\frac{d^2y}{dx^2}\frac{\partial L}{\partial y'}+\frac{dy}{dx}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)\quad\rightarrow\quad-\frac{dy}{dx}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)=\frac{d^2y}{dx^2}\frac{\partial L}{\partial y'}-\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'}\right)$ を⑤に代入すると

$$\frac{dy}{dx}\frac{\partial L}{\partial y}+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{\partial L}{\partial y'}-\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'}\right)=0$$

また　$\dfrac{dL}{dx}=\dfrac{\partial L}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{\partial L}{\partial y'}\dfrac{dy'}{dx}=\dfrac{\partial L}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{\partial L}{\partial y'}\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{\partial L}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{\partial L}{\partial y'}\dfrac{d^2y}{dx^2}$　を③に代入すると

$$\frac{dL}{dx}-\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'}\right)=0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(L-\frac{dy}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'}\right)=0$$

$$\therefore L-\frac{dy}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'}=C \quad \rightarrow \quad L-y'\frac{\partial L}{\partial y'}=C$$ （一定）・・・⑥

問３
力学的エネルギー保存より

$$0=\frac{1}{2}mv^2+mgh \qquad v=\sqrt{-2gy}$$ ・・・⑦

問４

$$ds^2=dx^2+dy^2 \quad \rightarrow \quad ds=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$

$$dt=\frac{ds}{v}=\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{-2gy}}dx$$

$$T=\int_0^a\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{-2gy}}dx \quad \rightarrow \quad L(y,y')=\sqrt{\frac{1+(y')^2}{-2gy}}$$

問５

$$\frac{\partial L}{\partial y'}=\frac{1}{\sqrt{-2gy}}\frac{\partial}{\partial y'}\sqrt{1+(y')^2}=\frac{1}{\sqrt{-2gy}}\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}$$

$$y'\frac{\partial L}{\partial y'}-L=\frac{1}{\sqrt{-2gy}}\frac{(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}}-\sqrt{\frac{1+(y')^2}{-2gy}}=C$$

$\sqrt{-2gy}\sqrt{1+(y')^2}$　を両辺にかけると

$$(y')^2-\left(1+(y')^2\right)=C\sqrt{-2gy}\sqrt{1+(y')^2}$$

$$-1=C\sqrt{-2gy}\sqrt{1+(y')^2} \qquad 1=C^2(-2gy)\left(1+(y')^2\right) \qquad \frac{1}{C^2}+2gy=-2gy(y')^2$$

$$\frac{1}{2gyC^2}+1=-(y')^2$$

$$(y')^2=-\left(\frac{C'}{2gy}+1\right)$$ ・・・⑧

問６

$y'=-\dfrac{1}{\tan\theta}$　とおくと　$(y')^2=\dfrac{1}{\tan^2\theta}$　　$\dfrac{1}{\tan^2\theta}=-\left(\dfrac{C'}{2gy}+1\right)$　　$\dfrac{1}{\tan^2\theta}+1=-\dfrac{C'}{2gy}$

$$\frac{1+\tan^2\theta}{\tan^2\theta}=-\frac{C'}{2gy}$$

$$y=-\frac{C'\tan^2\theta}{2g(1+\tan^2\theta)}=-\frac{C'\tan^2\theta\cos^2\theta}{2g}=-\frac{C'\sin^2\theta}{2g}\cdots⑨$$

$$\frac{dy}{d\theta}=-\frac{2C'\sin\theta\cos\theta}{2g}=-\frac{C'\sin\theta\cos\theta}{g}$$

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{dy}{d\theta}\frac{dx}{dy}=\frac{dy}{d\theta}\frac{1}{y'}=-\frac{C'\sin\theta\cos\theta}{g}\left(-\tan\theta\right)=\frac{C'\sin^2\theta}{g}=\frac{C'(1-\cos 2\theta)}{2g}$$

$$x=\frac{C'}{2g}\left(\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)=\frac{C'}{4g}\left(2\theta-\sin 2\theta\right)\cdots⑩$$

$$y=-\frac{C'}{2g}\left(\sin^2\theta\right)=-\frac{C'}{4g}\left(1-\cos 2\theta\right)\cdots⑪$$

$2\theta=\varphi$　とおくと

$$x=\frac{C'}{4g}\left(\varphi-\sin\varphi\right)$$

$$y=-\frac{C'}{4g}\left(1-\cos\varphi\right)$$

$x=0$　$y=0$　$\therefore$　$0=1-\cos\varphi$　$\varphi=0$

$x=a$　$y=0$　$\therefore$　$0=1-\cos\varphi$　$\varphi=2\pi$

$$a=\frac{C'}{4g}\left(2\pi-\sin 2\pi\right)=\frac{C'}{4g}\left(2\pi-0\right)=\frac{2\pi C'}{4g}$$

$$a=\frac{\pi C'}{2g}\qquad C'=\frac{2ga}{\pi}$$

$$x=\frac{a}{2\pi}\left(\varphi-\sin\varphi\right)$$

$$y=-\frac{a}{2\pi}\left(1-\cos\varphi\right)$$

問８

$\cos\varphi=-1$ のとき y は最深　$\varphi=\pi$

$$\therefore y=-\frac{a}{2\pi}\left(1-(-1)\right)=-\frac{a}{\pi}$$

$$x=\frac{a}{2\pi}\left(\pi-\sin\pi\right)=\frac{a}{2}$$

問９

$$T=\int_0^a \sqrt{\frac{1+(y')^2}{-2gy}}dx$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}}=\frac{-\frac{a}{2\pi}(-\sin\varphi)}{\frac{a}{2\pi}(1-\cos\varphi)}=\frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}$$

$$L=\sqrt{\frac{1+\left(\frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}\right)^2}{\frac{ag}{\pi}(1-\cos\varphi)}}=\sqrt{\frac{\frac{(1-\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi}{(1-\cos\varphi)^2}}{\frac{ag}{\pi}(1-\cos\varphi)}}=\sqrt{\frac{\frac{1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}{(1-\cos\varphi)^2}}{\frac{ag}{\pi}(1-\cos\varphi)}}$$

$$=\sqrt{\frac{\frac{2(1-\cos\varphi)}{(1-\cos\varphi)^2}}{\frac{ag}{\pi}(1-\cos\varphi)}}=\sqrt{\frac{\frac{2}{(1-\cos\varphi)}}{\frac{ag}{\pi}(1-\cos\varphi)}}$$

$$L=\sqrt{\frac{\frac{2\pi}{ag}}{(1-\cos\varphi)^2}}=\sqrt{\frac{2\pi}{ag}}\frac{1}{(1-\cos\varphi)}$$

移動に要する時間

$$T=\int_0^a L(y,y')dx=\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{2\pi}{ag}}\frac{1}{(1-\cos\varphi)}\frac{dx}{d\varphi}d\varphi$$

$$T=\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{2\pi}{ag}}\frac{1}{(1-\cos\varphi)}\frac{a}{2\pi}(1-\cos\varphi)d\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{2\pi}{ag}}\frac{a}{2\pi}d\varphi=\sqrt{\frac{2\pi}{ag}}\frac{a}{2\pi}2\pi=\sqrt{\frac{2a\pi}{g}}$$

問１０

$$T=\sqrt{\frac{2a\pi}{g}}=\sqrt{\frac{2\times 3.14\times 1.0\times 10^6}{9.8}}=\sqrt{\frac{2\times 3.14}{9.8}}\times 1.0\times 10^3=\sqrt{0.64}\times 1.0\times 10^3$$

$$=0.8\times 1.0\times 10^3=8.0\times 10^2 s$$