

複素関数

2022. 9. 1

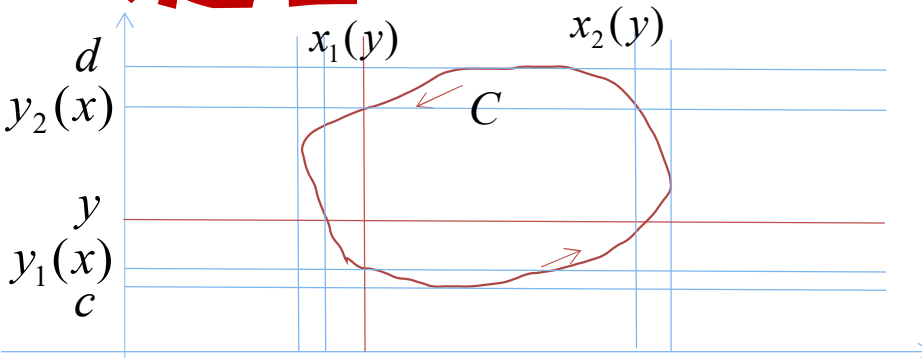
鹿児島現代物理勉強会

御領 悟志

グリーンの定理

$$\begin{aligned}
 - \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y} dy dx &= - \int_a^b [M]_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx \\
 &= - \int_a^b [M(x, y_2(x)) - M(x, y_1(x))] dx \\
 &= - \int_a^b M(x, y_2(x)) dx + \int_a^b M(x, y_1(x)) dx \\
 &= \int_b^a M(x, y_2(x)) dx + \int_a^b M(x, y_1(x)) dx \\
 &= \oint_c M(x, y) dx \quad \dots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

$$\int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial N}{\partial x} dx dy = \int_c^d [N]_{x_1(y)}^{x_2(y)} dy$$



$$\begin{aligned}
 &= \int_c^d N(x_2(y), y) dy - \int_c^d N(x_1(y), y) dy \\
 &= \int_c^d N(x_2(y), y) dy + \int_d^c N(x_1(y), y) dy \\
 &= \oint_c N(x, y) dy \quad \dots \textcircled{2}
 \end{aligned}$$

①②の結果より、下記の通り線積分を面積分に置き換えることができる。

$$\oint_c (M(x, y) dx + N(x, y) dy) = \iint_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy$$

正則関数(1)

複素変数 z の関数 $f(z)$ があつて、点 z が点 a に地下づく経路に関わりなく、同一の有限な極限值が存在するとき

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

$f(z)$ は、点 a において微分可能であるといい、その極限値を点 a における $f(z)$ の微分係数という。

$$\frac{df(a)}{dz} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

コーシー・リーマン方程式(1)

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{du(x, y)}{dz} + i \frac{dv(x, y)}{dz} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$dz = dx + idy \quad \dots \textcircled{3} \text{ どの方向からでも微分可能なので}$$

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\begin{aligned} \frac{df(z)}{dz} &= \frac{\partial u(x, y)}{i\partial y} + i \frac{\partial v(x, y)}{i\partial y} \\ &= \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} - i \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \quad \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

$f(z)$ が正則な関数だとすると③と④が等しいので

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \quad \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \quad \dots \textcircled{5}$$

領域Dにおいて定義された関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ が正則であるための必要十分条件は、 u, v が全微分可能で、かつ⑥の関係式が成り立つことである。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \textcircled{6}$$

コーシー・リーマン方程式(2)

複素変数 z の関数 $f(z)$ が領域 D 内で正則と仮定する。

$$f(z + \Delta z) - f(z) = f'(z)\Delta z + \rho|\Delta z| \quad \text{したがって} \quad \Delta z \rightarrow 0 \quad \text{のとき} \quad \rho \rightarrow 0 \quad \text{なので} \quad \dots \textcircled{7}$$

$$\Delta z = \Delta x + i\Delta y \quad |\Delta z| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad \rho = \sigma + i\tau \quad \text{とおくと}$$

$$\Delta x \rightarrow 0 \quad \Delta y \rightarrow 0 \quad \text{でかつ} \quad \sigma \rightarrow 0 \quad \tau \rightarrow 0 \quad \text{なので}$$

$$\left. \begin{aligned} u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) &= u_x(x, y)\Delta x + u_y(x, y)\Delta y + \sigma|\Delta z| \\ v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y) &= v_x(x, y)\Delta x + v_y(x, y)\Delta y + \tau|\Delta z| \end{aligned} \right\} \dots \textcircled{8}$$

このことは、 u と v は全微分可能であることを示している。

逆に u と v が全微分可能であり、コーシー・リーマンの方程式が成立すると仮定する。

$$\left. \begin{aligned} u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) &= u_x(x, y)\Delta x - v_x(x, y)\Delta y + \sigma|\Delta z| \\ iv(x + \Delta x, y + \Delta y) - iv(x, y) &= iv_x(x, y)\Delta x + iu_x(x, y)\Delta y + i\tau|\Delta z| \end{aligned} \right\} \dots \textcircled{9}$$

$$\begin{aligned} & (u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y)) - (u(x, y) + iv(x, y)) \\ &= u_x(x, y)\Delta x - v_x(x, y)\Delta y + \sigma|\Delta z| + iv_x(x, y)\Delta x + iu_x(x, y)\Delta y + i\tau|\Delta z| \quad \dots \textcircled{10} \end{aligned}$$

コーシー・リーマン方程式(3)

$$\begin{aligned}
 &= (u_x(x, y) + iv_x(x, y))\Delta x - v_x(x, y)(-i)i\Delta y + iu_x(x, y)(-i)i\Delta y + (\sigma + i\tau)|\Delta z| \\
 &= (u_x(x, y) + iv_x(x, y))\Delta x (-v_x(x, y)(-i) + iu_x(x, y)(-i))i\Delta y + (\sigma + i\tau)|\Delta z| \\
 &= (u_x(x, y) + iv_x(x, y))\Delta x + (iv_x(x, y) + u_x(x, y))i\Delta y + (\sigma + i\tau)|\Delta z| \\
 &= (u_x(x, y) + iv_x(x, y))\Delta x + (u_x(x, y) + iv_x(x, y))i\Delta y + (\sigma + i\tau)|\Delta z| \\
 &= (u_x(x, y) + iv_x(x, y))(\Delta x + i\Delta y) + (\sigma + i\tau)|\Delta z| \quad \cdots \textcircled{11}
 \end{aligned}$$

$$f(z + \Delta z) - f(z) = (u_x(x, y) + iv_x(x, y))\Delta z + \rho|\Delta z| \quad \cdots \textcircled{12}$$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = u_x(x, y) + iv_x(x, y) \quad \cdots \textcircled{13}$$

$\therefore f(z)$ は、微分可能であることを示す。

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \quad \frac{df(z)}{dz} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} - i \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$$

コーシーの積分定理(1)

関数 $f(z)$ が領域 D 内で正則であるとする。単一閉曲線 C とその内部が D 内にあるとする。

$$\int_c f(z)dz = \int_c (u(x, y) + iv(x, y))(dx + idy) \quad \cdots \textcircled{1}$$

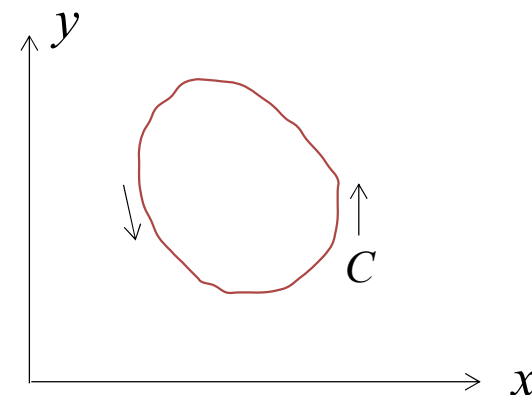
$$\int_c f(z)dz = \int_c (u(x, y)dx - v(x, y)dy) + i \int_c (v(x, y)dx + u(x, y)dy) \quad \cdots \textcircled{2}$$

単一閉曲線 C に沿っての線積分をグリーンの定理を用いて面積分に置き換えると

$$\int_c f(z)dz = \iint_R \left(-\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_R \left(\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right) dx dy \quad \cdots \textcircled{3}$$

$f(z)$ は正則なので、コーシー・リーマンの方程式の関係式を
③に代入すると

$$\int_c f(z)dz = \iint_R (0) dx dy + i \iint_R (0) dx dy = 0 \quad \cdots \textcircled{4}$$



$f(z)$ が閉曲線 C とその内部が正則のとき

$$\int_c f(z)dz = 0 \quad \cdots \textcircled{5}$$

コーシーの積分定理(2)

$f(z)$ が閉曲線 C とその内部が正則のとき

$$\int_C f(z) dz = 0 \quad \dots \textcircled{5}$$

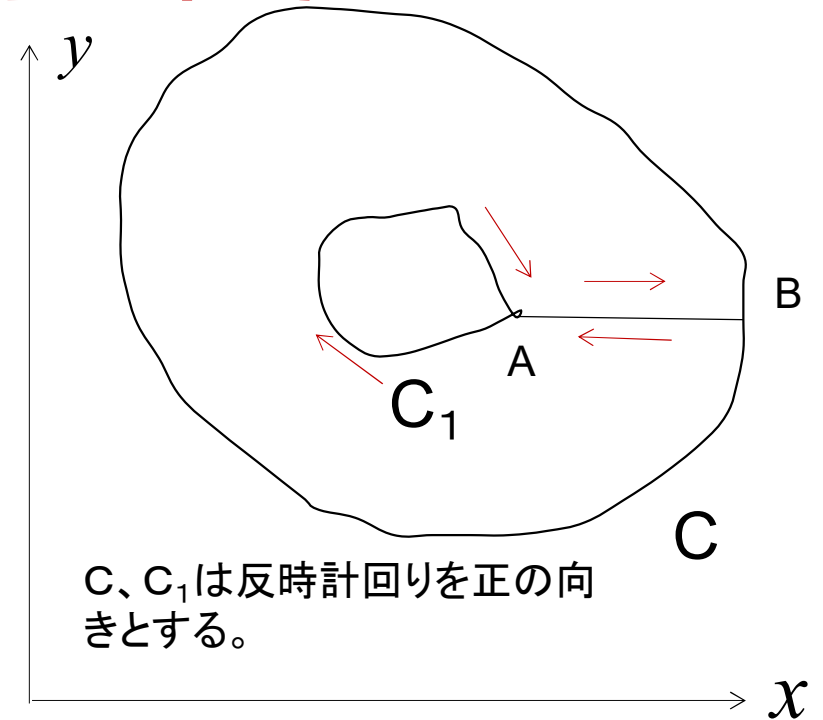
関数 $f(z)$ が領域 D 内で正則であるとする。単一閉曲線 C とその内部に単一閉曲線 C_1 があり、 C と C_1 の間は領域 D 内にあるものとする。

点 A からスタートして C_1 を時計回りに回転し点 A から点 B まで移動し、点 B から C を反時計回りに一周し再び A まで移動するとき $\textcircled{5}$ が成立する

$$\int_{-C_1} f(z) dz + \int_{AB} f(z) dz + \int_C f(z) dz + \int_{BA} f(z) dz = 0 \quad \dots \textcircled{6}$$

$$-\int_{C_1} f(z) dz + \int_{AB} f(z) dz - \int_{AB} f(z) dz + \int_C f(z) dz = 0$$

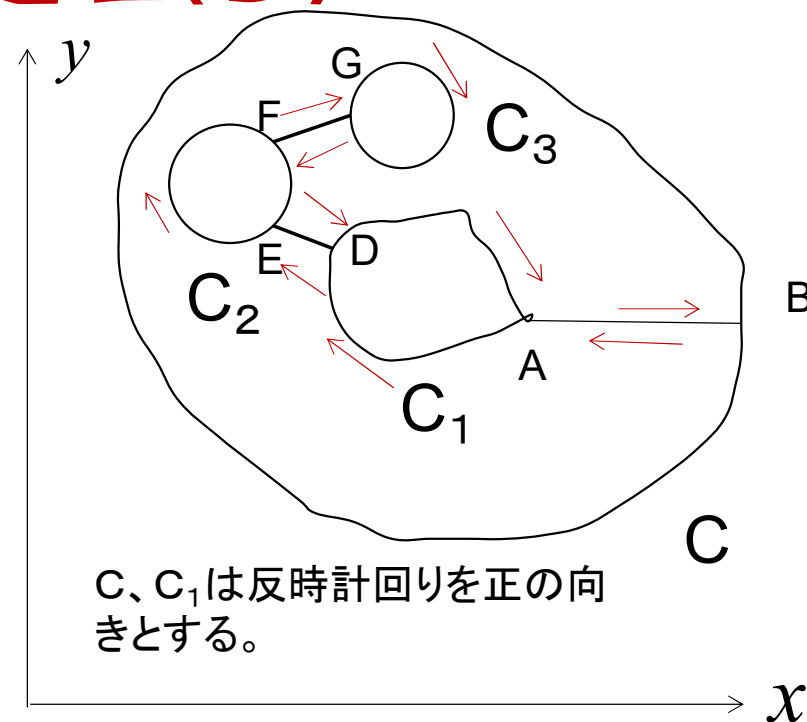
$$-\int_{C_1} f(z) dz + \int_C f(z) dz = 0 \quad \dots \textcircled{7}$$



$$\therefore \int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz \quad \dots \textcircled{8}$$

コーシーの積分定理(3)

$$\begin{aligned}
 & \int_{BA} f(z)dz + \int_{-C_1\text{左}} f(z)dz + \int_{DE} f(z)dz + \int_{-C_2\text{左}} f(z)dz \\
 & + \int_{FG} f(z)dz \cdots + \int_{-C_3} f(z)dz + \int_{GF} f(z)dz + \int_{-C_2\text{右}} f(z)dz \\
 & + \int_{ED} f(z)dz + \int_{-C_1\text{右}} f(z)dz + \int_{AB} f(z)dz + \int_C f(z)dz = 0 \quad \cdots \textcircled{9} \\
 & \int_{BA} f(z)dz + \int_{AB} f(z)dz + \int_{-C_1\text{左}} f(z)dz + \int_{-C_1\text{右}} f(z)dz + \\
 & \int_{-C_2\text{右}} f(z)dz + \int_{-C_2\text{左}} f(z)dz + \int_{DE} f(z)dz + \int_{ED} f(z)dz \\
 & + \int_{FG} f(z)dz + \int_{GF} f(z)dz + \int_{-C_3} f(z)dz + \int_C f(z)dz = 0 \quad \cdots \textcircled{10} \\
 & \int_{-C_1} f(z)dz + \int_{-C_2} f(z)dz + \int_{-C_3} f(z)dz + \int_C f(z)dz = 0 \quad \cdots \textcircled{11}
 \end{aligned}$$



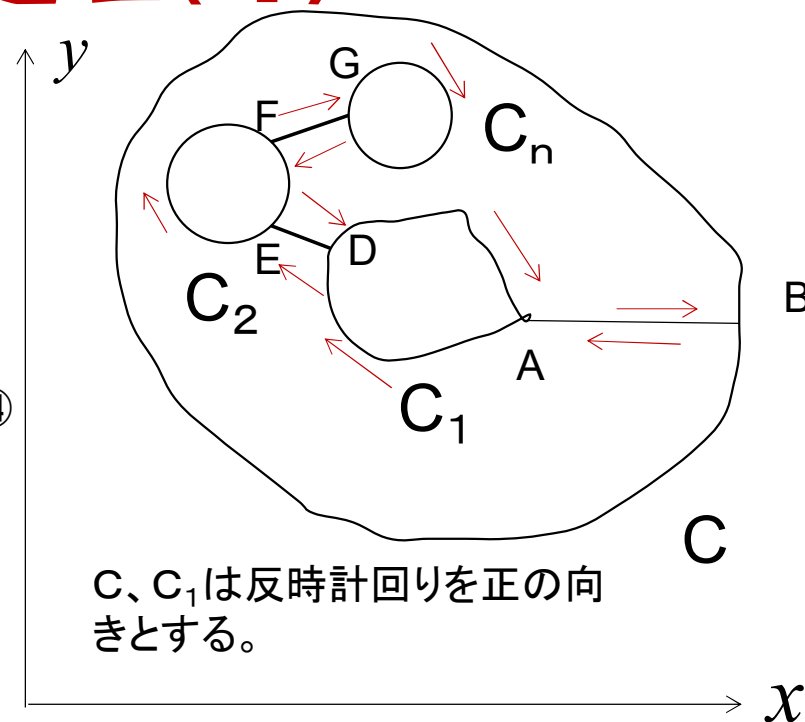
C 、 C_1 は反時計回りを正の向きとする。

$$\begin{aligned}
 & - \int_{C_1} f(z)dz - \int_{C_2} f(z)dz - \int_{C_3} f(z)dz + \int_C f(z)dz = 0 \quad \cdots \textcircled{12} \\
 \therefore & \int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \int_{C_3} f(z)dz \quad \cdots \textcircled{13}
 \end{aligned}$$

コーシーの積分定理(4)

関数 $f(z)$ が領域 D 内で正則であるとする。単一閉曲線 C とその内部に単一閉曲線 $C_1 \sim C_n$ があり、 C と $C_1 \sim C_n$ の間は領域 D 内にあるものとする。

$$\therefore \int_C f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{C_k} f(z) dz \quad \dots \textcircled{14}$$

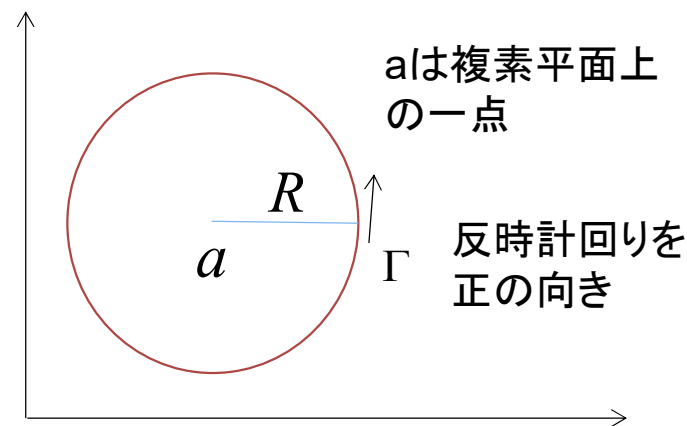


単一閉曲線についての積分(1)

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{z-a} dz \quad \text{単一閉曲線についての周回積分について}$$

$$z-a = Re^{i\theta} \quad dz = iRe^{i\theta} d\theta \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{z-a} dz = \int_{\Gamma} \frac{iRe^{i\theta} d\theta}{Re^{i\theta}} = \int_0^{2\pi} i d\theta = 2\pi i \quad \cdots \textcircled{2}$$



$$\int_{\Gamma} \frac{1}{(z-a)^k} dz = \int_{\Gamma} \frac{iRe^{i\theta} d\theta}{R^k e^{i\theta k}} = i \int_0^{2\pi} R^{(1-k)} e^{i\theta(1-k)} d\theta \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k=1 \end{array} \right. \rightarrow 2\pi i \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k \neq 1 \end{array} \right. \rightarrow \frac{R^{(1-k)}}{i(1-k)} \left[e^{i\theta(1-k)} \right]_0^{2\pi} = \frac{R^{(1-k)}}{i(1-k)} (e^{i2\pi(1-k)} - 1) = \frac{R^{(1-k)}}{i(1-k)} (1-1) = 0 \quad \cdots \textcircled{5}$$

コーシーの積分表示(1)

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_{C_1} \frac{f(z)}{z-a} dz \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\int_{C_1} \frac{f(z) - f(a)}{z-a} dz = \int_{C_1} \frac{f(z)}{z-a} dz - \int_{C_1} \frac{f(a)}{z-a} dz$$

$$= \int_{C_1} \frac{f(z)}{z-a} dz - f(a) \int_{C_1} \frac{1}{z-a} dz \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\int_{C_1} \frac{f(z) - f(a)}{z-a} dz = \int_{C_1} \frac{f(z)}{z-a} dz - 2\pi i f(a) \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\left| \int_{C_1} \frac{f(z) - f(a)}{z-a} dz \right| \leq \int_{C_1} \frac{|f(z) - f(a)|}{|z-a|} |dz| \quad \dots \textcircled{4}$$

$$|f(z) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{任意の} \varepsilon \text{ に対して}$$

$$\text{ある} \delta \text{ が決まり } |z-a| = R < \delta$$

$$\int_{C_1} \frac{|f(z) - f(a)|}{|z-a|} |dz| \leq \int_{C_1} \frac{\varepsilon}{R} 2\pi R = 2\pi \varepsilon \rightarrow 0 \quad \dots \textcircled{5}$$

$$0 = \int_{C_1} \frac{f(z)}{z-a} dz - 2\pi i f(a) \quad \dots \textcircled{6}$$

$$\therefore \int_{C_1} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a) \quad \dots \textcircled{7}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz = f(a) \quad \dots \textcircled{8}$$

コーシーの積分表示(2)

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz \quad \dots \textcircled{9}$$

$h \rightarrow 0$ とすれば

$$f(a+h) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-a-h} dz \quad \dots \textcircled{10}$$

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz \quad \dots \textcircled{12}$$

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \left(\frac{f(z)}{z-a-h} - \frac{f(z)}{z-a} \right) dz$$

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz = 2\pi i f'(a)$$

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)h}{(z-a-h)(z-a)} dz$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a-h)(z-a)} dz \quad \dots \textcircled{11}$$

コーシーの積分表示(3)

$$f'(a+h) - f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) \{(z-a)^2 - (z-a-h)^2\}}{(z-a-h)^2 (z-a)^2} dz \dots \textcircled{13} \quad f''(a) = \frac{2!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^3} dz \dots \textcircled{15}$$

$$f'(a+h) - f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) \{(2z-2a-h)h\}}{(z-a-h)^2 (z-a)^2} dz$$

$$\frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)(2z-2a-h)}{(z-a-h)^2 (z-a)^2} dz$$

$h \rightarrow 0$ とすれば

$$\frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{2f(z)(z-a)}{(z-a)^4} dz$$

$$\frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} = \frac{2}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^3} dz \dots \textcircled{14}$$

$$f^{(2)}(a) = \frac{2!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^3} dz$$

コーシーの積分表示(4)

$$f''(a+h) - f''(a) = \frac{2!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) \{(z-a)^3 - (z-a-h)^3\}}{(z-a-h)^3 (z-a)^3} dz \quad \dots \textcircled{16}$$

$$f''(a+h) - f''(a) = \frac{2!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) \{(z-a) - (z-a-h)\} \{(z-a)^2 + (z-a)(z-a-h) + (z-a-h)^2\}}{(z-a-h)^3 (z-a)^3} dz$$

$$f''(a+h) - f''(a) = \frac{2!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) h \{(z-a)^2 + (z-a)(z-a-h) + (z-a-h)^2\}}{(z-a-h)^3 (z-a)^3} dz \quad \dots \textcircled{17}$$

$h \rightarrow 0$ とすれば

$$\frac{f''(a+h) - f''(a)}{h} = \frac{2!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) \{(z-a)^2 + (z-a)(z-a) + (z-a)^2\}}{(z-a)^3 (z-a)^3} dz = \frac{2!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) 3(z-a)^2}{(z-a)^6} dz$$

$$\frac{f''(a+h) - f''(a)}{h} = \frac{2!3}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^4} dz \quad \dots \textcircled{18} \quad \therefore f^{(3)}(a) = \frac{3!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^4} dz$$

コーシーの積分表示(5)

$f(z)$ が、領域 D 内部で正則な関数とする。 D の内部に、正の回転の向きを持つ単一閉曲線 C があって、 C の内部は領域 D に含まれる。1 点 a が C の内部にあるとき、次の式が成り立つ。

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad \dots \textcircled{19} \quad \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(a)$$

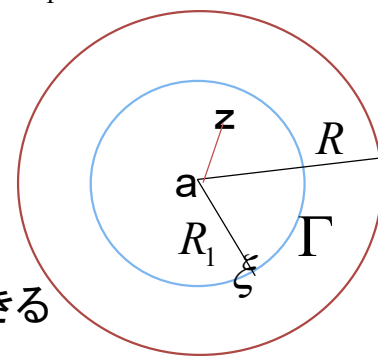
$\text{(例)} \quad f^{(2)}(1) = \frac{2!}{2\pi i} \int_C \frac{4z^2 - 3z + 2}{(z-1)^{2+1}} dz$	$\int_C \frac{4z^2 - 3z + 2}{(z-1)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} f^{(2)}(1)$
$f(z) = 4z^2 - 3z + 2$	$\int_C \frac{4z^2 - 3z + 2}{(z-1)^3} dz = \frac{2\pi i}{2} 8 = 8\pi i$
$\therefore f^{(2)}(z) = 8$	

テイラー展開(1)

$$0 < R_1 < R$$

$f(z)$ が正則な領域 D にある。領域 D 内の1点 $z=a$ を中心として D 内の半径 R の円を考える

$z=a$ を中心とする半径 R_1 の円 Γ を考える



$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = f(z) \cdots \textcircled{1} \quad \frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - a - (z - a)} = \frac{1}{(\xi - a) \left(1 - \frac{z - a}{\xi - a} \right)} \cdots \textcircled{2}$$

ξ は半径 R_1 の円周上 Γ にあるとする $\therefore \left| \frac{z - a}{\xi - a} \right| < 1$ なので②は無限級数に展開できる

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - a - (z - a)} = \frac{1}{(\xi - a) \left(1 - \frac{z - a}{\xi - a} \right)} = \frac{1}{(\xi - a)} \left[1 + \left(\frac{z - a}{\xi - a} \right) + \left(\frac{z - a}{\xi - a} \right)^2 + \left(\frac{z - a}{\xi - a} \right)^3 + \cdots \right] \cdots \textcircled{3}$$

$$\frac{f(\xi)}{\xi - z} = \frac{f(\xi)}{(\xi - a)} \left[1 + \frac{(z - a)}{(\xi - a)} + \frac{(z - a)^2}{(\xi - a)^2} + \frac{(z - a)^3}{(\xi - a)^3} + \cdots \right] \cdots \textcircled{4}$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^2} d\xi (z - a) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^3} d\xi (z - a)^2 + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^4} d\xi (z - a)^3 + \cdots \textcircled{5}$$

テイラー展開(2)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^2} d\xi (z - a) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^3} d\xi (z - a)^2 + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^4} d\xi (z - a)^3 + \dots \textcircled{5}$$

$$\frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi = f^{(n)}(a) \quad \dots \textcircled{6} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad \dots \textcircled{7}$$

⑤に⑦を代入することで

$$f(z) = f(a) + f^{(1)}(a) \frac{(z - a)}{1!} + f^{(2)}(a) \frac{(z - a)^2}{2!} + f^{(3)}(a) \frac{(z - a)^3}{3!} + \dots \textcircled{8}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a) \frac{(z - a)^n}{n!} \quad \dots \textcircled{9}$$

テイラー展開(3)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a) \frac{(z-a)^n}{n!}$$

$$f(z) = e^z \quad a = 0 \quad f^{(n)}(0) = e^0 = 1$$

$$f(z) = \sin z \quad f^{(2n)}(0) = (-1)^n \sin 0 = 0$$
$$f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n \cos 0 = (-1)^n$$

$$f(z) = \cos z \quad f^{(2n)}(0) = (-1)^n \cos 0 = (-1)^n$$
$$f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n \sin 0 = 0$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

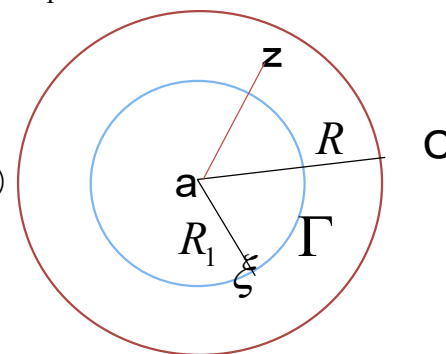
ローラン展開(1)

$$0 < R_1 < R$$

$f(z)$ が正則な領域 D にある。領域 D 内の1点 $z=a$ を中心として D 内の半径 R の円 C を考える

$z=a$ を中心とする半径 R_1 の円 Γ とする。 C と Γ の間では $f(\xi)$ は正則なので

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \cdots \textcircled{1}$$



$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - a - (z - a)} = \frac{1}{(\xi - a) \left(1 - \frac{z - a}{\xi - a} \right)} \cdots \textcircled{2}$$

ξ は半径 R の円周上 C にあるとする $\therefore \left| \frac{z - a}{\xi - a} \right| < 1$ なので②は無有限級数に展開できる

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - a - (z - a)} = \frac{1}{(\xi - a) \left(1 - \frac{z - a}{\xi - a} \right)} = \frac{1}{(\xi - a)} \left[1 + \left(\frac{z - a}{\xi - a} \right) + \left(\frac{z - a}{\xi - a} \right)^2 + \left(\frac{z - a}{\xi - a} \right)^3 + \cdots \right] \cdots \textcircled{3}$$

$$\frac{f(\xi)}{\xi - z} = \frac{f(\xi)}{(\xi - a)} \left[1 + \frac{(z - a)}{(\xi - a)} + \frac{(z - a)^2}{(\xi - a)^2} + \frac{(z - a)^3}{(\xi - a)^3} + \cdots \right] \cdots \textcircled{4}$$

ローラン展開(2)

$$\frac{f(\xi)}{\xi - z} = \frac{f(\xi)}{(\xi - a)} + \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^2}(z - a) + \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^3}(z - a)^2 + \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^4}(z - a)^3 \cdots \textcircled{5}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - a)} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^2} d\xi (z - a) + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^3} d\xi (z - a)^2 + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^4} d\xi (z - a)^3 + \cdots \textcircled{6}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi = b_n \cdots \textcircled{7} \quad \text{とおけば}$$

⑥に⑦を代入することで

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = b_0 + b_1(z - a) + b_2(z - a)^2 + b_3(z - a)^3 + \cdots + b_n(z - a)^n \cdots \textcircled{8}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - a)^n \cdots \textcircled{9}$$

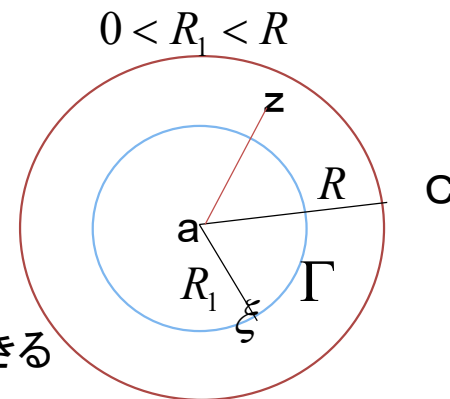
ローラン展開(3)

$f(z)$ が正則な領域 D にある。領域 D 内の1点 $z=a$ を中心として D 内の半径 R の円を考える

$z=a$ を中心とする半径 R_1 の円 Γ を考える

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad \dots \textcircled{10} \quad -\frac{1}{\xi - z} = -\frac{1}{\xi - a - (z - a)} = \frac{1}{(z - a) \left(1 - \frac{\xi - a}{z - a} \right)} \dots \textcircled{11}$$

ξ は半径 R_1 の円周上 Γ にあるとする $\therefore \left| \frac{\xi - a}{z - a} \right| < 1$ なので②は無限級数に展開できる



$$-\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{z - a - (\xi - a)} = \frac{1}{(z - a) \left(1 - \frac{\xi - a}{z - a} \right)} = \frac{1}{(z - a)} \left[1 + \left(\frac{\xi - a}{z - a} \right) + \left(\frac{\xi - a}{z - a} \right)^2 + \left(\frac{\xi - a}{z - a} \right)^3 + \dots \right] \dots \textcircled{12}$$

$$-\frac{f(\xi)}{\xi - z} = \frac{f(\xi)}{(z - a)} \left[1 + \frac{(\xi - a)}{(z - a)} + \frac{(\xi - a)^2}{(z - a)^2} + \frac{(\xi - a)^3}{(z - a)^3} + \dots \right] \dots \textcircled{13}$$

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{(z - a) 2\pi i} \int_{\Gamma} f(\xi) d\xi + \frac{1}{(z - a)^2 2\pi i} \int_{\Gamma} f(\xi) (\xi - a) d\xi + \frac{1}{(z - a)^3 2\pi i} \int_{\Gamma} f(\xi) (\xi - a)^2 d\xi + \frac{1}{(z - a)^4 2\pi i} \int_{\Gamma} f(\xi) (\xi - a)^3 d\xi + \dots \textcircled{14}$$

ローラン展開(4)

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\xi) d\xi \frac{1}{(z-a)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\xi)(\xi-a) d\xi \frac{1}{(z-a)^2} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\xi)(\xi-a)^2 d\xi \frac{1}{(z-a)^3} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\xi)(\xi-a)^3 d\xi \frac{1}{(z-a)^4} +$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\xi)(\xi-a)^{n-1} d\xi = b_{-n} \quad \text{とおけば} \quad b_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{-n+1}} d\xi \quad \dots \textcircled{15}$$

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = b_{-1} \frac{1}{(z-a)} + b_{-2} \frac{1}{(z-a)^2} + b_{-3} \frac{1}{(z-a)^3} + \dots + b_{-n} \frac{1}{(z-a)^n}$$

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \sum_{n=1}^{\infty} b_{-n} \frac{1}{(z-a)^n} \quad \dots \textcircled{16}$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_{-n} \frac{1}{(z-a)^n} \quad \dots \textcircled{17}$$

ローラン展開(5)

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi \quad b_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{-n+1}} d\xi \quad \text{なので}$$

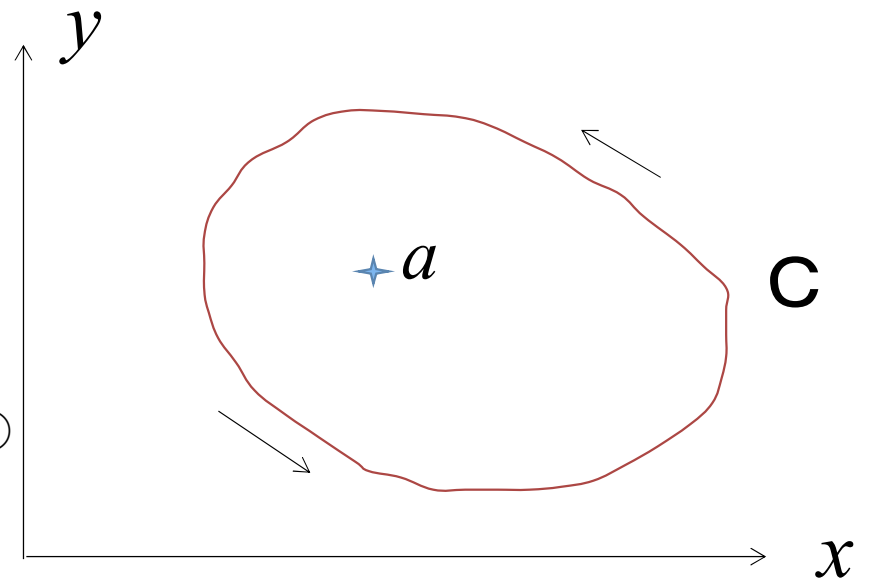
$$-\infty < n < \infty \quad \text{において} \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_{-n} \frac{1}{(z - a)^n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - a)^n \quad \cdots \textcircled{18}$$

留数定理(1)

関数 $f(z)$ が領域 D 内で1点 a を除いて正則であるとする。点 a を $f(z)$ の特異点とする。 D 内に正の回転の向きを持つ単一閉曲線 C をとり、 C の内部に特異点 a があり、それ以外にその他の特異点がなければ、 C に沿っての $f(z)$ の積分は0ではない。またこの積分値は積分路 C の選び方には無関係である。

$$\operatorname{Res}[f(z), a] = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz \cdots \textcircled{1}$$



① を点 a における $f(z)$ の留数という。

$\therefore f(z)$ が点 a で正則ならば、 $f(z)$ の点 a における留数は0である。

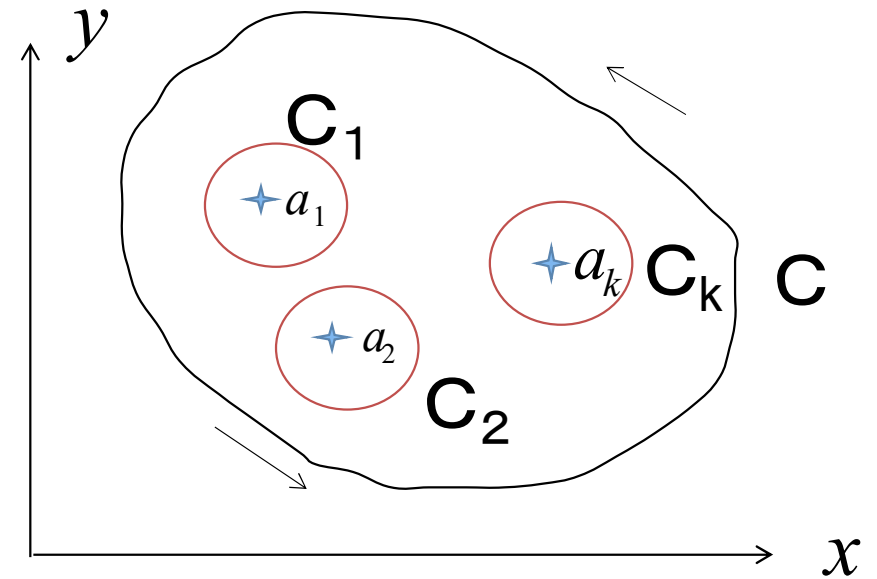
留数定理(2)

関数 $f(z)$ が領域 D 内で $a_1 \sim a_n$ を除いて正則であるとする。

点 $a_1 \sim a_n$ を $f(z)$ の特異点とする。 D 内に正の回転の向きを持つ単一閉曲線 C をとり、 C の内部に特異点 $a_1 \sim a_n$ があり、 C に沿っての $f(z)$ の積分は0ではない。またこの積分値は積分路 C の選び方には無関係である。単一閉曲線 $C_1 \sim C_n$ は、それぞれ特異点 $a_1 \sim a_n$ の各1つずつだけ含むようにとる。 $f(z)$ は C と単一閉曲線 $C_1 \sim C_n$ の間は領域 D 内で正則なので、コーシーの積分定理⑭より

$$\text{Res}[f(z), a_k] = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} f(z) dz \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \text{Res}[f(z), a_k] \quad \cdots \textcircled{2}$$



留数定理(3)

$z = a$ が $f(z)$ の特異点とすると $f(z)$ は、 $z = a$ を中心として次のようにローラン展開できる。

$$f(z) = \varphi(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{-k}}{(z-a)^k} \quad \cdots \textcircled{1} \quad \varphi(z) \text{ は正則な関数である。}$$

$$\sum_{k=1}^n \text{Res}[f(z), a] = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C \varphi(z) dz + \frac{1}{2\pi i} \int_C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{-k}}{(z-a)^k} dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{C_k} \frac{b_{-k}}{(z-a)^k} dz \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\int_C \frac{1}{(z-a)^k} dz = \int_C \frac{i R e^{i\theta} d\theta}{R^k e^{i\theta k}} = i \int_0^{2\pi} R^{(1-k)} e^{i\theta(1-k)} d\theta \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k=1 \end{array} \right. \rightarrow 2\pi i \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k \neq 1 \end{array} \right. \rightarrow \frac{R^{(1-k)}}{i(1-k)} \left[e^{i\theta(1-k)} \right]_0^{2\pi} = \frac{R^{(1-k)}}{i(1-k)} (e^{i2\pi(1-k)} - 1) = \frac{R^{(1-k)}}{i(1-k)} (1-1) = 0 \quad \cdots \textcircled{5}$$

留数定理(4)

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[f(z), a] = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{\infty} b_{-k} \int_{C_k} \frac{1}{(z-a)^k} dz \quad \dots \textcircled{6}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} b_{-1} \int_{C_k} \frac{1}{(z-a)^1} dz = \frac{1}{2\pi i} b_{-1} 2\pi i = b_{-1} \quad \dots \textcircled{7}$$

$z = a$ が $f(z)$ の特異点とするとき、 $z = a$ を中心とする ローラン展開の負べき第一項が留数 である。

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[f(z), a] = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz = b_{-1} \quad \dots \textcircled{8}$$

留数定理(5)

$f(z)$ が点 a で正則ではないが、 a を中心とする円の内部から中心 a を除外した点は正則とする。このような点 a を $f(z)$ の **特異点** という。

$$f(z) = \sum_{n=1}^k \frac{b_{-n}}{(z-a)^n} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-a)^k \quad \cdots \textcircled{1}$$

と $f(z)$ が特異点 a を中心とするローラン展開ができるとき点 a を $f(z)$ の **k 位の極** という。

$$f(z) = \frac{b_{-1}}{(z-a)} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-a)^k \quad \cdots \textcircled{2}$$

ならば点 a は、 $f(z)$ の **1位の極** である。

留数定理(6)

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^k} \quad \dots \textcircled{1} \quad \text{と表せるとき}$$

また、 $g(z)$ は点 a で正則とする。ここで、 $g(z)$ をテイラー展開すると

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n \quad \dots \textcircled{2}$$

$$b_n = \frac{g^{(n)}(a)}{n!} \quad \dots \textcircled{3}$$

$$f(z) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n}{(z-a)^k} \quad \dots \textcircled{4}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{(z-a)^n}{(z-a)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(z-a)^{k-n}} \quad \dots \textcircled{4}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{b_n}{(z-a)^{k-n}} + \sum_{n=k}^{\infty} b_n (z-a)^{n-k} \quad \dots \textcircled{5}$$

$$f(z) = \frac{b_0}{(z-a)^k} + \frac{b_1}{(z-a)^{k-1}} + \dots + \frac{b_{k-1}}{(z-a)} + \sum_{n=k}^{\infty} b_n (z-a)^{n-k} \quad \dots \textcircled{6}$$

$$\therefore \operatorname{Res}[f(z), a] = b_{k-1} \quad \dots \textcircled{7} \quad b_{k-1} = \frac{g^{(k-1)}(a)}{(k-1)!} \quad g(z) = (z-a)^k f(z)$$

$$\operatorname{Res}[f(z), a] = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z-a)^k f(z)] \quad \dots \textcircled{8}$$

留数定理(7)

$$f(z) = \frac{b_0}{(z-a)^k} + \frac{b_1}{(z-a)^{k-1}} + \cdots + \frac{b_m}{(z-a)^{k-m}} + \cdots + \frac{b_{k-1}}{(z-a)} + \sum_{n=k}^{\infty} b_n (z-a)^{n-k} \cdots \textcircled{9}$$

$g(a) \neq 0$ のとき $b_0 = g(a) \cdots \textcircled{10}$ 点 a は、 $f(z)$ の k位の極 である。

$g(a) = 0$ のとき $b_0 = 0 \cdots \textcircled{11}$ $m < k$ の場合 $0 \leq n \leq m-1$ の範囲で

$$b_n = \frac{g^{(n)}(a)}{n!} = 0 \text{ ならば } 0 = b_0 = b_1 = b_2 = \cdots = b_{m-1} \cdots \textcircled{12}$$

$$f(z) = \frac{b_m}{(z-a)^{k-m}} + \cdots + \frac{b_{k-1}}{(z-a)} + \sum_{n=k}^{\infty} b_n (z-a)^{n-k} \cdots \textcircled{13}$$

$\therefore$ 点 a は、 $f(z)$ の k-m位の極 である。

$$m \geq k \text{ の場合 } f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} b_n (z-a)^{n-k} \cdots \textcircled{14} \text{ 点 } a \text{ は、} f(z) \text{ の除去可能な特異点である。}$$

留数計算(1)

$$f(z) = \frac{(z+2)}{(z-1)(z+3)^2} \quad \dots \textcircled{1}$$

$f(z)$ の特異点は、 $z=1$ $k=1$

$$g(z) = \frac{(z+2)}{(z+3)^2} \quad g(1) = \frac{(1+2)}{(1+3)^2} = \frac{3}{16}$$

$g(z)$ は、 $z=1$ で正則

$$\text{Res}[f(z), 1] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z+2)}{(z+3)^2} = \frac{3}{16}$$

$z=-3$ $k=2$

$$g(z) = \frac{(z+2)}{(z-1)} \quad g(-3) = \frac{(-3+2)}{(-3-1)} = \frac{1}{4}$$

$g(z)$ は、 $z=-3$ で正則

$$\text{Res}[f(z), a] = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z-a)^k f(z)]$$

$$\text{Res}[f(z), -3] = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow -3} \frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}} [(z+3)^2 f(z)]$$

$$= \frac{1}{(1)!} \lim_{z \rightarrow -3} \frac{d}{dz} \left[\frac{(z+2)}{(z-1)} \right]$$

$$= \lim_{z \rightarrow -3} \left[\frac{(z+2)'(z-1) - (z+2)(z-1)'}{(z-1)^2} \right]$$

$$= \lim_{z \rightarrow -3} \left[\frac{(z-1) - (z+2)}{(z-1)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow -3} \left[\frac{-3}{(z-1)^2} \right] = -\frac{3}{16}$$

$\therefore$

全微分可能の定義(1)

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = Ah + Bk + \varepsilon(h, k)\sqrt{h^2 + k^2}$$

とおくとき

$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \varepsilon(h, k) = 0$ が成り立つならば、関数 $f(x, y)$ は、点 (a, b) で全微分可能という。

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - Ah - Bk}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \varepsilon(h, k) \rightarrow 0$$

が成り立つならば、関数 $f(x, y)$ は、点 (a, b) で全微分可能という。

全微分可能(1)

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = Ah + Bk + \varepsilon(h, k)\sqrt{h^2 + k^2}$$

$$h \rightarrow 0 \quad k = 0$$

$$f(a+h, b) - f(a, b) = Ah + \varepsilon(h, 0)h \quad \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} - A = \varepsilon(h, 0) \rightarrow 0$$

$$\frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} - A = 0 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} = A \quad f_x(a, b) = A$$

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = Ah + Bk + \varepsilon(h, k)\sqrt{h^2 + k^2}$$

$$h = 0 \quad k \rightarrow 0$$

$$f(a, b+k) - f(a, b) = Bk + \varepsilon(0, k)k \quad \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k} - B = \varepsilon(0, k) \rightarrow 0$$

$$\frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k} - B = 0 \quad \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k} = B \quad f_y(a, b) = B$$