１．交換関係について

$[A,B]=AB-BA$　と定義する。

$[cA,B]=cAB-BcA=c(AB-BA)=c[A,B]$　ここでｃは定数とする。・・・・①

$[A+B,C]=(A+B)C-C(A+B)=AC+BC-CA-CB=AC-CA+BC-CB=[A,C]+[B,C]$・・・・②

$[A,B+C]=A(B+C)-(B+C)A=AB+AC-BA-CA=AB-BA+AC-CA=[A,B]+[A,C]$・・・・③

$[B,A]=BA-AB=-(AB-BA)=-[A,B]$・・・・④

$[A,A]=AA-AA=0$・・・・⑤

$[x,p_x]=i\hbar$	$[y,p_y]=i\hbar$	$[z,p_z]=i\hbar$		
$[L_y,L_z]=i\hbar L_x$	$[L_z,L_x]=i\hbar L_y$	$[L_x,L_y]=i\hbar L_z$	$\Rightarrow$	$\vec{L}\times\vec{L}=i\hbar\vec{L}$

$L^2=L_x{}^2+L_y{}^2+L_z{}^2$　と置くと

$[L^2,L_z]=[L_x{}^2,L_z]+[L_y{}^2,L_z]+[L_z{}^2,L_z]$・・・・⑥

$[A^2,B]=A^2B-BA^2=A^2B-ABA+ABA-BA^2=A(AB-BA)+(AB-BA)A=A[A,B]+[A,B]A$・・・・⑦

$[A,B^2]=AB^2-B^2A=AB^2-BAB+BAB-B^2A=(AB-BA)B+B(AB-BA)=[A,B]B+B[A,B]$・・・・⑧

$[L_x{}^2,L_z]=L_x[L_x,L_z]+[L_x,L_z]L_x=L_x(-i\hbar L_y)+(-i\hbar L_y)L_x=-i\hbar L_xL_y-i\hbar L_yL_x$・・・・⑨

$[L_y{}^2,L_z]=L_y[L_y,L_z]+[L_y,L_z]L_y=L_y(i\hbar L_x)+(i\hbar L_x)L_y=i\hbar L_yL_x+i\hbar L_xL_y$・・・・⑩

$[L_z{}^2,L_z]=L_{zy}[L_z,L_z]+[L_z,L_z]L_z=L_z(0)+(0)L_z=0$・・・・⑪

⑨＋⑩＋⑪

$[L_x{}^2+L_y{}^2+L_z{}^2,L_z]=[L^2,L_z]=0$・・・・⑫

同様に　$[L_x{}^2+L_y{}^2+L_z{}^2,L_x]=[L^2,L_x]=0$・・・・⑬　$[L_x{}^2+L_y{}^2+L_z{}^2,L_y]=[L^2,L_y]=0$・・・・⑭

２．一般化された角運動量について　～　交換関係から一般的な角運動量を導く。

一般的に角運動量演算子$\vec{J}$が、下記の交換関係を満たすと仮定する。

$$\vec{J}\times\vec{J}=i\hbar\vec{J}\qquad [J_y,J_z]=i\hbar J_x\quad [J_z,J_x]=i\hbar J_y\quad [J_x,J_y]=i\hbar J_z$$

$$[\vec{J}^2,J_z]=0\quad [\vec{J}^2,J_x]=0\quad [\vec{J}^2,J_y]=0$$

$\vec{J}^2=J_x{}^2+J_y{}^2+J_z{}^2$は$\vec{J}$の各成分と交換可能である。

∴　$\vec{J}^2$とJ_zとが同時に確定値λとμを持つ状態が存在する。

$\vec{J}^2\varphi=\lambda\varphi$　････①　$J_z\varphi=\mu\varphi$････②　を同時に満足する$\varphi=\varphi(\lambda,\mu)$が存在することになる。

$\vec{J}^2\varphi-J_z{}^2\varphi=\lambda\varphi-\mu^2\varphi$　より　$\left(\vec{J}^2-J_z{}^2\right)\varphi=\left(\lambda-\mu^2\right)\varphi$　$\left(J_x{}^2+J_y{}^2\right)\varphi(\lambda,\mu)=\left(\lambda-\mu^2\right)\varphi(\lambda,\mu)$　････③

$\varphi=\varphi(\lambda,\mu)$は、$J_x{}^2+J_y{}^2$の固有値$\lambda-\mu^2$に対する固有関数である。

また$J_x{}^2+J_y{}^2$の固有値は負にならない。　なぜなら、エルミート演算子の固有値は実数である。

固有状態では平均値は固有値に等しい。

$\left(\varphi,(J_x{}^2+J_y{}^2)\varphi\right)=\left\langle J_x{}^2+J_y{}^2\right\rangle=\lambda-\mu^2\geq 0$････④

$\lambda\geq 0$　でかつ　$\lambda\geq\mu^2$　　∴　$\sqrt{\lambda}\geq|\mu|$　････⑤

$J_+=J_x+iJ_y$　　$J_-=J_x-iJ_y$　と定義する。

$[J_z,J_\pm]=[J_z,J_x\pm iJ_y]=[J_z,J_x]\pm i[J_z,J_y]=i\hbar J_y\mp ii\hbar J_x=i\hbar J_y\pm\hbar J_x=\pm\hbar\left(J_x\pm iJ_y\right)=\pm\hbar J_\pm$　････⑥

$\left(J_zJ_\pm-J_\pm J_z\right)\varphi(\lambda,\mu)=\pm\hbar J_\pm\varphi(\lambda,\mu)$

$J_zJ_\pm\varphi(\lambda,\mu)=J_\pm J_z\varphi(\lambda,\mu)\pm\hbar J_\pm\varphi(\lambda,\mu)=J_\pm\mu\varphi(\lambda,\mu)\pm\hbar J_\pm\varphi(\lambda,\mu)$

$J_zJ_\pm\varphi(\lambda,\mu)=\left(\mu\pm\hbar\right)J_\pm\varphi(\lambda,\mu)$････⑦

⑦から$J_\pm\varphi(\lambda,\mu)$は$J_z$の固有値$\mu\pm\hbar$に対する固有関数である。

∴　$J_\pm\varphi(\lambda,\mu)=C\varphi(\lambda,\mu\pm\hbar)$････⑧　　Cは定数

⑧は$\vec{J}^2$とJ_zの固有値をλ,μとすれば$\lambda,\mu\pm\hbar$も固有値であることを示している。

したがって　$\lambda,\mu-2\hbar$ ： $\lambda,\mu-\hbar$ ： λ,μ ： $\lambda,\mu+\hbar$ ： $\lambda,\mu+2\hbar$が固有値の組となる。････（ア）

$|\mu|\leq\sqrt{\lambda}$　の関係よりμには最小値と最大値がある。

$\mu_0\to$**最小**
$\mu_1\to$**最大**　とすれば　$J_-\varphi(\lambda,\mu_0)=0$　　$J_+\varphi(\lambda,\mu_1)=0$

$$J_{\mp}J_{\pm}=\left(J_x \mp iJ_y\right)\left(J_x \pm iJ_y\right)=J_x{}^2 \pm iJ_xJ_y \mp iJ_yJ_x + J_y{}^2 = J_x{}^2 + J_y{}^2 \pm i\left(J_xJ_y - J_yJ_x\right) = J_x{}^2 + J_y{}^2 \pm ii\hbar J_z$$

$$J_{\mp}J_{\pm}=\left(J_x \mp iJ_y\right)\left(J_x \pm iJ_y\right)=J_x{}^2 + J_y{}^2 \mp \hbar J_z \cdots\cdot ⑨$$

$$J_+J_-\varphi(\lambda,\mu_0)=\left(J_x+iJ_y\right)\left(J_x-iJ_y\right)\varphi(\lambda,\mu_0)=\left(J_x{}^2+J_y{}^2+\hbar J_z\right)\varphi(\lambda,\mu_0)=\left(\lambda-\mu_0{}^2+\mu_0\hbar\right)\varphi(\lambda,\mu_0)=0\cdots\cdot ⑩$$

$$J_-J_+\varphi(\lambda,\mu_1)=\left(J_x-iJ_y\right)\left(J_x+iJ_y\right)\varphi(\lambda,\mu_1)=\left(J_x{}^2+J_y{}^2-\hbar J_z\right)\varphi(\lambda,\mu_1)=\left(\lambda-\mu_1{}^2-\mu_1\hbar\right)\varphi(\lambda,\mu_1)=0\cdots\cdot ⑪$$

$\varphi(\lambda,\mu_0)\neq 0$　$\varphi(\lambda,\mu_1)\neq 0$ より

$$\begin{aligned}&\lambda-\mu_0{}^2+\mu_0\hbar=0\\&\lambda-\mu_1{}^2-\mu_1\hbar=0\end{aligned}$$ なので

$$\mu_1{}^2-\mu_0{}^2+\mu_0\hbar+\mu_1\hbar=0 \qquad \left(\mu_1+\mu_0\right)\left(\mu_1-\mu_0\right)+\hbar\left(\mu_1+\mu_0\right)=0 \qquad \left(\mu_1+\mu_0\right)\left(\mu_1-\mu_0+\hbar\right)=0 \quad \cdots\cdot ⑫$$

$\mu_1-\mu_0\geq 0$ なので　⑫より　$\mu_1+\mu_0=0$　　$\therefore$　$\mu_0=-\mu_1$　$\cdots\cdot$ ⑬

（ア）より

$$\begin{aligned}&\mu_1=\mu+j\hbar\\&\mu_0=\mu-j\hbar\end{aligned}$$　$\mu_1-\mu_0=2j\hbar$ とすると

$$\begin{aligned}&\mu_1-\mu_0=2j\hbar\\&\mu_1+\mu_0=0\end{aligned}$$　したがって　$2\mu_1=2j\hbar$　$$\begin{aligned}&\mu_1=j\hbar\\&\mu_0=-j\hbar\end{aligned}$$　$\cdots\cdot$ ⑭

$\lambda-\mu_0{}^2+\mu_0\hbar=0$　に⑭を代入すると　$\lambda-(-j\hbar)^2+(-j\hbar)\hbar=0$

$$\lambda-j^2\hbar^2-j\hbar^2=0 \qquad \lambda=j^2\hbar^2+j\hbar^2=(j^2+j)\hbar^2=j(j+1)\hbar^2\cdots\cdot ⑮$$

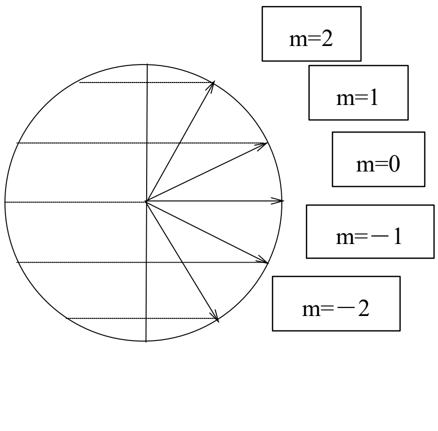
> $\vec{J}\times\vec{J}=i\hbar\vec{J}$　の交換関係を満足する $\vec{J}^2$ の固有値は　$\lambda=j(j+1)\hbar^2$ であり
>
> その固有状態は J_z の固有値　$\mu=m\hbar=j\hbar,(j-1)\hbar,\cdots\cdot,-j\hbar$　に対する $2j+1$ 重の縮重を持つ。

j は 0 または正の整数

あるいは半奇数　　$j=0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2}$

角運動量　$\vec{J}^2$　の大きさが　$\sqrt{\lambda}=\sqrt{j(j+1)\hbar^2}=\sqrt{j(j+1)}\hbar\cdots\cdot$ ①

$j=2$ とすれば $\sqrt{j(j+1)}\hbar=\sqrt{2(2+1)}\hbar=\sqrt{6}\hbar\cdots\cdot$ ②　　ベクトルの長さ $\sqrt{6}$　縦軸はＪ z　の m



$$\vec{J}^2\varphi(j,m)=j(j+1)\varphi(j,m) \quad \cdots\cdot ③$$

$$J_z\varphi(j,m)=m\hbar\varphi(j,m)$$

$$J_\pm\varphi(j,m)=C\varphi(j,m\pm 1) \quad \cdots\cdot ④$$

$$(J_\pm\varphi, J_\pm\varphi)$$

$$((J_x\pm iJ_y)\varphi,(J_x\pm iJ_y)\varphi)=(C\varphi(j,m\pm1),C\varphi(j,m\pm1))=C_\pm^{\ *}C_\pm(\varphi(j,m\pm1),\varphi(j,m\pm1))=C_\pm^{\ *}C_\pm=|C_\pm|^2$$

$$=(J_x\varphi,J_x\varphi)+(J_x\varphi,\pm iJ_y\varphi)+(\pm iJ_y\varphi,J_x\varphi)+(\pm iJ_y\varphi,\pm iJ_y\varphi)$$

$$=(\varphi,J_x^{\ 2}\varphi)\pm i(\varphi,J_xJ_y\varphi)\mp i(\varphi,J_yJ_x\varphi)\mp i\pm i(\varphi,J_y^{\ 2}\varphi)$$

$$=(\varphi,J_x^{\ 2}\varphi)\pm i(\varphi,J_xJ_y\varphi)\mp i(\varphi,J_yJ_x\varphi)+(\varphi,J_y^{\ 2}\varphi)\cdots\cdot ⑤$$

$$=(\varphi,(J_x^{\ 2}+J_y^{\ 2}\pm i\{J_xJ_y-J_yJ_x\})\varphi)\cdots\cdot ⑥$$

$$=(\varphi,(J_x^{\ 2}+J_y^{\ 2}\pm ii\hbar J_z)\varphi)=(\varphi,(J_x^{\ 2}+J_y^{\ 2}\mp\hbar J_z)\varphi) \ =\left(\varphi,\left\{\vec{J}^2-J_z^{\ 2}\mp\hbar J_z\right\}\varphi\right)$$

$$=(\varphi,\{j(j+1)\hbar^2-m^2\hbar^2\mp m\hbar^2\}\varphi)=\{j(j+1)\hbar^2-m^2\hbar^2\mp m\hbar^2\}=\{j(j+1)-m^2\mp m\}\hbar^2$$

$$=\{j(j+1)-m(m\pm1)\}\hbar^2\cdots\cdot ⑦ \qquad \therefore\ |C_\pm|^2=\{j(j+1)-m(m\pm1)\}\hbar^2$$

$$|C_\pm|=\hbar\sqrt{j(j+1)-m(m\pm1)}\cdots\cdot ⑧$$

$$|C_\pm|=\hbar\sqrt{j^2+j-m^2\mp m}=\hbar\sqrt{(j-m)(j+m)+(j\mp m)}=\hbar\sqrt{(j\mp m)(j\pm m)+(j\mp m)}$$

$$|C_\pm|=\hbar\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\cdots\cdot ⑨$$

$$J_\pm\varphi(j,m)=(J_x\pm iJ_y)\varphi(j,m)=\hbar\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\varphi(j,m\pm1)\cdots\cdot ⑩$$

$$J_+\varphi(j,m)=(J_x+iJ_y)\varphi(j,m)=\hbar\sqrt{(j-m)(j+m+1)}\varphi(j,m+1)\cdots\cdot ⑪$$

$$J_-\varphi(j,m)=(J_x-iJ_y)\varphi(j,m)=\hbar\sqrt{(j+m)(j-m+1)}\varphi(j,m-1)\cdots\cdot ⑫$$

⑪＋⑫ $$2J_x\varphi(j,m)=\hbar\sqrt{(j-m)(j+m+1)}\varphi(j,m+1)+\hbar\sqrt{(j+m)(j-m+1)}\varphi(j,m-1)\cdots\cdot ⑬$$

$$J_x\varphi(j,m)=\frac{\hbar}{2}\left\{\sqrt{(j-m)(j+m+1)}\varphi(j,m+1)+\sqrt{(j+m)(j-m+1)}\varphi(j,m-1)\right\}\cdots\cdot ⑭$$

⑪－⑫ $$2iJ_y\varphi(j,m)=\hbar\sqrt{(j-m)(j+m+1)}\varphi(j,m+1)-\hbar\sqrt{(j+m)(j-m+1)}\varphi(j,m-1)\cdots\cdot ⑮$$

$$J_y\varphi(j,m)=\frac{\hbar}{2i}\left\{\sqrt{(j-m)(j+m+1)}\varphi(j,m+1)-\sqrt{(j+m)(j-m+1)}\varphi(j,m-1)\right\}\cdots\cdot ⑯$$

$$J_z\varphi(j,m)=m\hbar\varphi(j,m)\cdots\cdot ⑰$$

ブラベクトル表示を用いると

$J_z|J,\ M\rangle = M\hbar|J,\ M\rangle \cdots$ ①　　$M=-J,-(J-1),\cdots,0,1,\cdots,J-1,J$ の **2J＋1 個の縮重**あり

$J^2|J,\ M\rangle = J(J+1)\hbar^2|J,\ M\rangle \cdots$ ②

J のとき

$$J_\pm|J,\ M\rangle = \hbar\sqrt{(J\mp M)(J\pm M+1)}|J,\ M\pm1\rangle$$

$$\langle J\ \ M'|J_\pm|J,\ M\rangle = \hbar\sqrt{(J\mp M)(J\pm M+1)}\langle J\ \ M'|J,\ M\pm1\rangle = \hbar\sqrt{(J\mp M)(J\pm M+1)}\delta_{M',\ M\pm1} \cdots ③$$

$$\langle J\ \ M'|J_z|J,\ M\rangle = M\hbar\delta_{M',\ M} \cdots ④$$

$$\langle J\ \ M'|J^2|J,\ M\rangle = J(J+1)\hbar^2\delta_{M',\ M} \cdots ⑤$$

$J=\dfrac{1}{2}$　のときについて計算する。

$$\langle J\ \ M'|J_\pm|J,\ M\rangle = \hbar\sqrt{(J\mp M)(J\pm M+1)}\delta_{M',\ M\pm1}$$

（ア）$M'=\dfrac{1}{2}\quad M=\dfrac{1}{2}$

$$\langle J\ \ M'|J_\pm|J,\ M\rangle = \hbar\sqrt{\left(\frac{1}{2}\mp\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}+1\right)}\delta_{\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\pm1}$$

$$\langle J\ \ M'|J_+|J,\ M\rangle = \hbar\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1\right)}\delta_{\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}+1} = 0$$

$$\langle J\ \ M'|J_-|J,\ M\rangle = \hbar\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1\right)}\delta_{\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}-1} = 0$$

$$\langle J\ \ M'|J_z|J,\ M\rangle = \frac{1}{2}\hbar\delta_{\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\hbar$$

$$\langle J\ \ M'|J^2|J,\ M\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\hbar^2\delta_{\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}} = \frac{3}{4}\hbar^2$$

（イ）$M'=\dfrac{1}{2}\quad M=-\dfrac{1}{2}$

$$\langle J\ \ M'|J_\pm|J,\ M\rangle = \hbar\sqrt{\left(\frac{1}{2}\mp(-\frac{1}{2})\right)\left(\frac{1}{2}\pm(-\frac{1}{2})+1\right)}\delta_{\frac{1}{2},\ (-\frac{1}{2})\pm1}$$

$$\langle J\ \ M'|J_+|J,\ M\rangle = \hbar\sqrt{\left(\frac{1}{2}-(-\frac{1}{2})\right)\left(\frac{1}{2}+(-\frac{1}{2})+1\right)}\delta_{\frac{1}{2},\ (-\frac{1}{2})+1} = \hbar$$

$$\langle J\ \ M'|J_-|J,\ M\rangle = \hbar\sqrt{\left(\frac{1}{2}+(-\frac{1}{2})\right)\left(\frac{1}{2}-(-\frac{1}{2})+1\right)}\delta_{\frac{1}{2},\ (-\frac{1}{2})-1} = 0$$

$$\langle J\ \ M'|J_z|J,\ M\rangle = -\frac{1}{2}\hbar\delta_{\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}} = 0$$

$$\langle J \quad M'|J^2|J, \quad M\rangle = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\hbar^2\delta_{\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}} = 0$$

（ウ）$M' = -\frac{1}{2} \quad M = \frac{1}{2}$

$$\langle J \quad M'|J_\pm|J, \quad M\rangle = \hbar\sqrt{\left(\frac{1}{2}\mp\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}+1\right)}\delta_{-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\pm1}$$

$$\langle J \quad M'|J_+|J, \quad M\rangle = \hbar\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1\right)}\delta_{-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}+1} = 0$$

$$\langle J \quad M'|J_-|J, \quad M\rangle = \hbar\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1\right)}\delta_{-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}-1} = \hbar$$

$$\langle J \quad M'|J_z|J, \quad M\rangle = \frac{1}{2}\hbar\delta_{-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}} = 0$$

$$\langle J \quad M'|J^2|J, \quad M\rangle = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\hbar^2\delta_{-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}} = 0$$

（エ）$M' = -\frac{1}{2} \quad M = -\frac{1}{2}$

$$\langle J \quad M'|J_\pm|J, \quad M\rangle = \hbar\sqrt{\left(\frac{1}{2}\mp(-\frac{1}{2})\right)\left(\frac{1}{2}\pm(-\frac{1}{2})+1\right)}\delta_{-\frac{1}{2},\ (-\frac{1}{2})\pm1}$$

$$\langle J \quad M'|J_+|J, \quad M\rangle = \hbar\sqrt{\left(\frac{1}{2}-(-\frac{1}{2})\right)\left(\frac{1}{2}+(-\frac{1}{2})+1\right)}\delta_{-\frac{1}{2},\ (-\frac{1}{2})+1} = 0$$

$$\langle J \quad M'|J_-|J, \quad M\rangle = \hbar\sqrt{\left(\frac{1}{2}+(-\frac{1}{2})\right)\left(\frac{1}{2}-(-\frac{1}{2})+1\right)}\delta_{-\frac{1}{2},\ (-\frac{1}{2})-1} = 0$$

$$\langle J \quad M'|J_z|J, \quad M\rangle = -\frac{1}{2}\hbar\delta_{-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\hbar$$

$$\langle J \quad M'|J^2|J, \quad M\rangle = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\hbar^2\delta_{-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}\hbar^2$$

$$J_+ = \hbar\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad J_- = \hbar\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad J_z = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdots\cdots ⑥$$

$$J_+ = J_x + iJ_y \qquad J_- = J_x - iJ_y \cdots\cdots ⑦$$

$$J_x = \frac{1}{2}(J_+ + J_-) \quad J_y = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-) \cdots\cdots ⑧$$

$J = \frac{1}{2}$ のとき

$$J_x = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad J_y = \frac{\hbar}{2i}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad J_z = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad J^2 = \frac{3}{4}\hbar^2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

粒子のスピンは、軌道角運動量とは異なりその粒子に固有の内部自由度に関わる一般化された角運動量の一種である。スピン角運動量は、粒子の位置$\vec{r}$や運動量$\vec{p}$のような力学変数とは無関係の独自の自由度に基づく。

$S=\frac{1}{2}$　のとき

$$\sigma_x=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\quad \sigma_y=\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix}\quad \sigma_z=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\quad S^2=\frac{3}{4}\hbar^2\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$S_x=\frac{\hbar}{2}\sigma_x\quad S_y=\frac{\hbar}{2}\sigma_y\quad S_z=\frac{\hbar}{2}\sigma_z\quad \sigma^2=\frac{3}{4}\hbar^2\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$\sigma_x{}^2=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\quad \sigma_y{}^2=\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\quad \sigma_z{}^2=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$S^2=S_x{}^2+S_x{}^2+S_x{}^2=\left(\frac{\hbar}{2}\sigma_x\right)^2+\left(\frac{\hbar}{2}\sigma_y\right)^2+\left(\frac{\hbar}{2}\sigma_z\right)^2=\frac{\hbar^2}{4}\left(\sigma_x{}^2+\sigma_y{}^2+\sigma_z{}^2\right)=\frac{3}{4}\hbar^2\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

★スピン演算子は、何らかの変数の微分演算子という形ではかけない。

行列表示で示すしか方法はない。**(Pauli)**

$$S_z=\frac{\hbar}{2}\sigma_z=\frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\qquad \alpha=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\quad \beta=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$S_z\alpha=\frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\frac{\hbar}{2}\alpha\quad S_z\beta=\frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}=-\frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=-\frac{\hbar}{2}\beta$$

一般にスピン　$\frac{1}{2}$　の粒子の波動関数のφ中には、上向きの成分と、下向きの成分が含まれる。

$$\varphi=\varphi_+(\vec{r})\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\varphi_-(\vec{r})\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varphi_+(\vec{r})\\\varphi_-(\vec{r})\end{bmatrix}$$