計量テンソル初歩
（一般相対論へ）

2020.11.27

鹿児島現代物理勉強会

御領　悟志

座標変換（１）

１つのリーマン空間の計量が $g_{ij}(x)$ のとき

$$ds^2 = g_{ij}(x)dx^i dx^j \quad \cdots ①$$

x' 座標系でのリーマン空間計量 $g'_{ij}(x)$

$$ds'^2 = g'_{ij}(x')dx'^i dx'^j \quad \cdots ②$$

２点間の距離はどの座標系で表現しても同じ

$$ds'^2 = ds^2 \quad \cdots ③$$

$$g'_{ij}(x')dx'^i dx'^j = g_{ij}(x)dx^i dx^j \quad \cdots ④$$

$$g'_{ij}(x')\frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\frac{\partial x'^j}{\partial x^l}dx^k dx^l = g_{ij}(x)dx^i dx^j$$

④より座標変換すると

$$g'_{ij}(x')\frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\frac{\partial x'^j}{\partial x^l}dx^k dx^l = g_{kl}(x)dx^k dx^l \quad \cdots ⑤$$

$$g_{kl}(x) = g'_{ij}(x')\frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\frac{\partial x'^j}{\partial x^l} \quad \cdots ⑥$$

$$g'_{ij}(x')dx'^i dx'^j = g_{ij}(x)\frac{\partial x^i}{\partial x'^k}\frac{\partial x^j}{\partial x'^l}dx'^k dx'^l$$

$$g'_{kl}(x')dx'^k dx'^l = g_{ij}(x)\frac{\partial x^i}{\partial x'^k}\frac{\partial x^j}{\partial x'^l}dx'^k dx'^l$$

$$g'_{kl}(x') = g_{ij}(x)\frac{\partial x^i}{\partial x'^k}\frac{\partial x^j}{\partial x'^l} \quad \cdots ⑦$$

座標変換（2）

1. スカラー

点 P の x 系 座標 $P(x^0, x^1, x^2, \cdots)$

点 P の x' 系 座標 $P(x'^0, x'^1, x'^2, \cdots)$

どの座標系から記述しても同じ量なので

$$\Phi'(x') = \Phi(x) \quad \cdots ①$$

2. 反変ベクトル

隣接した2点間座標値の差 $dx'^i = \dfrac{\partial x'^i}{\partial x^j} \partial x^j$

と同じ変換則に従って変換する量

$$A'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} A^j \quad \cdots ②$$

3. 共変ベクトル

$$\Phi'(x') = \Phi(x)$$

$$\frac{\partial \Phi'(x')}{\partial x'^i} = \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x'^i} = \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}$$

$$\frac{\partial \Phi'(x')}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x^j}$$ と同じ変換則に従って変換する量

$$B'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} B_j \quad \cdots ③$$

座標変換（3）

4. テンソル

$$T'^{ab} = \frac{\partial x'^{a}}{\partial x^{i}} \frac{\partial x'^{b}}{\partial x^{j}} T^{ij}$$

2階反変テンソル

$$T'_{pq} = \frac{\partial x^{u}}{\partial x'^{p}} \frac{\partial x^{v}}{\partial x'^{q}} T_{uv}$$

2階共変テンソル

$$T'^{ab}{}_{pq} = \frac{\partial x'^{a}}{\partial x^{i}} \frac{\partial x'^{b}}{\partial x^{j}} \frac{\partial x^{u}}{\partial x'^{p}} \frac{\partial x^{v}}{\partial x'^{q}} T^{ij}{}_{uv}$$

2階反変2階共変混合テンソル

$$T'^{ab\cdots}{}_{pq\cdots} = \frac{\partial x'^{a}}{\partial x^{i}} \frac{\partial x'^{b}}{\partial x^{j}} \cdots \frac{\partial x^{u}}{\partial x'^{p}} \frac{\partial x^{v}}{\partial x'^{q}} T^{ij\cdots}{}_{uv\cdots}$$

上添字 $a, b, \cdots$ の数はn個　下添字 $u, v, \cdots$ の数はm個

n階反変m階共変の混合テンソル

Einstein Equation

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

テンソルとは時間と空間3次元の計4次元からなる時空での座標系の変換に対して、その成分がある特定の変換をする多成分量で、その成分を添え字で表す。アインシュタインテンソルは添え字が2つで2階のテンソル。添え字μ ,ν は時空間の4つの座標成分を取る。