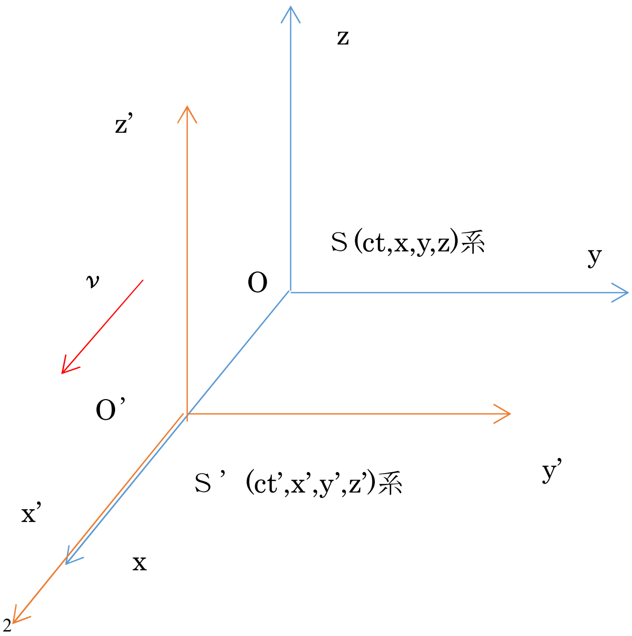
Ⅰ．ローレンツ変換の導出過程

$$x' = f(v)(x - vt)$$
$$ct' = g(v)x + h(v)ct$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$



O と O’ が重なっているとき光が発せられたとする。
光速不変の原理とどの慣性系でも物理法則は同等
に成立することから
Ｓ系（静止）とＳ’ 系（ｘ軸方向に v で移動）において
それぞれの慣性系で光は同じ速さで同様に球形に
拡がって行くので次の式が成り立つ。

$$x^2 + y^2 + z^2 - ct^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - ct'^2 = 0 \cdots ①$$

$$= f^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2 - (gx + hct)^2$$
$$= f^2 - 2f^2xvt + f^2v^2t^2 + y^2 + z^2 - g^2x^2 - 2ghxct - h^2c^2t^2$$

$$= (f^2 - g^2)x^2 - (2ghc + 2f^2v)xt + y^2 + z^2 + (f^2v^2 - h^2c^2)t^2 \quad \cdots ②$$

①と②の両辺が恒等式となることから

$$f^2 - g^2 = 1 \cdots ③$$

$$2ghc + 2f^2v = 0 \quad ghc + f^2v = 0 \quad gh + f^2\frac{v}{c} = 0 \quad gh + f^2\beta = 0 \cdots ④$$

$$f^2v^2 - h^2c^2 = -c^2 \quad f^2\frac{v^2}{c^2} - h^2 = -1 \quad h^2 - f^2\beta^2 = 1 \cdots ⑤$$

④より　$gh = -f^2\beta$　の両辺を２乗すると　$g^2h^2 = f^4\beta^2$　$h^2 = \dfrac{\beta^2}{g^2}f^4 \cdots ⑥$

⑥を⑤に代入すると $\dfrac{\beta^2}{g^2}f^4 = 1 + f^2\beta^2$　$\dfrac{\beta^2}{f^2 - 1}f^4 = 1 + f^2\beta^2$　$\beta^2 f^4 = (1 + f^2\beta^2)(f^2 - 1)$

$\beta^2 f^4 = f^2 - 1 + f^4\beta^2 - f^2\beta^2$　$1 = f^2(1 - \beta^2)$　$f^2 = \dfrac{1}{(1 - \beta^2)}$　$\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$　とおくと

$$f^2 = \gamma^2 \cdots ⑦$$

③より $g^2 = f^2 - 1 = \gamma^2 - 1 = \dfrac{1}{1 - \beta^2} - 1 = \dfrac{1 - (1 - \beta^2)}{1 - \beta^2} = \dfrac{\beta^2}{1 - \beta^2} = \beta^2\gamma^2 \cdots ⑧$

⑥より　$h^2 = \dfrac{\beta^2}{g^2}f^4 = \dfrac{\beta^2}{\beta^2\gamma^2}\gamma^4 = \gamma^2 \cdots ⑨$

$f^2 = h^2 = \gamma^2$　と　$g^2 = \beta^2\gamma^2 \cdots ⑩$

$x \to \infty$　のとき $x' \to \infty$　$\therefore$　$f > 0$　$f = \gamma \cdots ⑪$

$t \to \infty$　のとき $t' \to \infty$　$\therefore$　$h > 0$　$h = \gamma \cdots$⑪

④より　$gh + f^2 \beta = 0$　　$g\gamma + \gamma^2 \beta = 0$　　$g = -\gamma\beta \cdots$⑫

$$
\begin{aligned}
x' &= \gamma(x - vt) \\
ct' &= -\gamma\beta x + \gamma ct = \gamma(-\beta x + ct) \cdots ⑬ \\
y' &= y \\
z' &= z
\end{aligned}
$$

次のように整理する。

$$
\begin{aligned}
ct' &= -\gamma\beta x + \gamma ct = \gamma ct - \gamma\beta x \\
x' &= \gamma\left(x - \frac{v}{c} ct\right) = \gamma(x - \beta ct) = -\gamma\beta ct + \gamma x \cdots ⑭ \\
y' &= y \\
z' &= z
\end{aligned}
$$

⑭を行列を用いて表すと

$$
\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \cdots ⑮
$$

$$
L = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdots ⑯
$$

$\overrightarrow{X}' = \begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$　　$\overrightarrow{X} = \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$　　$\overrightarrow{X}' = L\overrightarrow{X}$　　を　ローレンツ変換　という。

$$
x^\mu = (x^0 \quad x^1 \quad x^2 \quad x^3) \qquad x^\mu = (ct \quad x \quad y \quad z)
$$

$$
x_\mu = (x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3) \qquad x_\mu = (ct \quad -x \quad -y \quad -z)
$$

$$
x_\mu = (x^0 \quad -x^1 \quad -x^2 \quad -x^3)
$$