No.

Date 20 8 8

[ポテンシャルの方程式]

真空中の電位 ϕ, ベクトルポテンシャル $\vec{A}$ に対する偏微分方程式は

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla^2\phi &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{—①} \\ \nabla^2\vec{A} &= -\mu_0\vec{j} \quad \text{—②}\end{aligned}}$$

①, ② いずれも定常状態において導かれたもの.

定常状態で $\rho=0$ $\vec{j}=0$ ならば $\phi=0$ $\vec{A}=0$ である。

しかるに 非定常状態では電荷や電流のない場合でも電磁波の形で電界は存在できる。

非定常状態を含む一般の場合に拡張する

$\vec{B}=\mathrm{rot}\vec{A}$ を $\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\mathrm{rot}\vec{E}$ に代入すると

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\vec{A}=-\mathrm{rot}\vec{E}$$

$$\mathrm{rot}\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=-\mathrm{rot}\vec{E} \longrightarrow \mathrm{rot}\left(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=0 \quad \text{—③}$$

これは x, y, z, t を関数とする $\phi(x,y,z,t)$ が存在して

$$\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\mathrm{grad}\,\phi \quad \text{—④} \qquad \because\ \mathrm{rot}(-\mathrm{grad}\,\phi) = -\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\phi=0$$

$$\therefore\ \vec{E}=-\mathrm{grad}\,\phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad \text{—⑤}$$

ここで ϕ は一般化されたスカラーポテンシャル

この様な $\vec{A}$, ϕ は一義的には決まらない

$\mathrm{rot}\vec{A}'=\vec{B}$ となるベクトルポテンシャル $\vec{A}'$ も考えてよいが

$$\vec{E}=-\mathrm{grad}\,\phi'-\frac{\partial\vec{A}'}{\partial t} \quad \text{—⑥}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{rot}\,\vec{A} = \vec{B} \\ \mathrm{rot}\,\vec{A'} = \vec{B} \end{array}\right\} \text{より} \quad \mathrm{rot}(\vec{A'} - \vec{A}) = 0 \quad \text{—⑦}$$

$$\therefore \quad \vec{A'} - \vec{A} = \mathrm{grad}\,u$$

$\vec{A'} = \vec{A} + \mathrm{grad}\,u$ の自由度をもつ —⑧

この自由度に従って，スカラーポテンシャルにも自由度が生じ

$$\phi' = \phi + v \quad \text{—⑨}$$

$\vec{A'}$ と ϕ' が ⑤ を満すことから

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}(\phi + v) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{grad}\,u$$

$$= -\mathrm{grad}\,\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \underbrace{- \mathrm{grad}\,v - \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{grad}\,u} \quad \text{—⑩}$$

$$-\mathrm{grad}\,v - \mathrm{grad}\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{—⑪}$$

$\mathrm{grad}\left(-v - \dfrac{\partial u}{\partial t}\right) = 0$ —⑫ となり 時間 t のみに依存する関数 $w(t)$ によって

$$w(t) = -v - \frac{\partial u}{\partial t}$$

$\therefore \quad v = -w(t) - \dfrac{\partial u}{\partial t}$ —⑬ と書けることを要する

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{A'} = \vec{A} + \mathrm{grad}\,u \\ \phi' = \phi - w(t) - \dfrac{\partial}{\partial t}u \end{array}\right. \quad \text{—⑭}$$

ポテンシャル内の変換
gauge 変換と言う

いま

$$\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \phi'}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{A'} = \varepsilon_0\mu_0\left\{\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial w(t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\} + \mathrm{div}\,\vec{A} + \nabla^2 u$$

$$= \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{A} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla^2 u \quad \text{—⑮}$$

u, w を適当に選べば 右辺 $= 0$ となる

No.

Date 20　8. 8

$\underline{\underline{\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial\phi}{\partial t}+\mathrm{div}\vec{A}=0}}$ となるポテンシャルを用いることが多い。

Lorentz gauge, Lorentzの条件という。

$\mathrm{div}\vec{A}$ も可能 $\longrightarrow$ Coulomb gauge

この様にして

ϕ, $\vec{A}$ が決まると

$$\left\{\begin{aligned}\vec{E}&=-\mathrm{grad}\,\phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\\ \vec{B}&=\mathrm{rot}\,\vec{A}\end{aligned}\right\} \text{—⑯}$$

により $\vec{E}$, $\vec{B}$ が決まる。

$\mathrm{div}\vec{D}=\rho$ に $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}$　$\vec{E}=-\mathrm{grad}\,\phi-\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ を代入すると

$$\mathrm{div}\left\{-\varepsilon_0\,\mathrm{grad}\,\phi-\varepsilon_0\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right\}=\rho \text{ —⑰}$$

$$-\varepsilon_0\,\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\phi-\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\vec{A}=\rho$$

$$-\varepsilon_0\nabla^2\phi-\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)=\rho$$

$$-\nabla^2\phi+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \text{ —⑱}$$

$$\underline{\underline{\nabla^2\phi-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}}} \text{ —⑲}$$

$\mathrm{rot}\,\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\mu_0\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ —⑳ に　$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}$　$\vec{B}=\mathrm{rot}\,\vec{A}$

$\vec{E}=-\mathrm{grad}\,\phi-\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ を代入する

No.

Date 20 8 8

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad —(21)$$

$$= \mu\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left\{-\mathrm{grad}\,\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right\} \quad —(22)$$

$$\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{A} - \nabla^2\vec{A} = \mu\vec{j} - \mu_0\varepsilon_0\,\mathrm{grad}\frac{\partial\phi}{\partial t} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}$$

$$\mathrm{grad}\Big(\underbrace{\mathrm{div}\,\vec{A} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\phi}{\partial t}}_{0}\Big) - \nabla^2\vec{A} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = \mu\vec{j}$$

$$-\nabla^2\vec{A} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = \mu\vec{j} \quad —(23)$$

$$\nabla^2\vec{A} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{j} \quad —(24)$$

(19) (24) より

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla^2\phi - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\\ \nabla^2\vec{A} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu\vec{j}\end{aligned}}$$

一般の非定常状態への拡張した式