

I. ゲージ不変性について

ゲージ不変性 → 標準理論の要

ゲージ不変性+ヒッグス機構 → 現実世界を記述する理論の完成

ゲージ不変性 → 波動関数の位相不変性

$$\psi \rightarrow \eta \psi$$

$|\eta|=1$ なので $\eta = \exp(ig\theta)$ g は結合定数 θ は任意の変数

II. 大域的ゲージ不変性

ネーターの定理 → 連続的変換に対して物理が不変であると、それに対応した保存量がある

$$\mathfrak{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \cdots \textcircled{1} \quad \psi \Rightarrow \psi \exp(ig\theta) \cdots \textcircled{2}$$

$$\psi \rightarrow \psi + \delta\psi \quad \delta\psi = ig\theta\psi \quad \text{のとき}$$

$$\delta\mathfrak{L} = 0$$

$$\delta\mathfrak{L} = \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\psi} \delta\psi + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} \delta(\partial_\mu\psi) + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\bar{\psi}} \delta\bar{\psi} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} \delta(\partial_\mu\bar{\psi}) = 0 \cdots \textcircled{3}$$

$\delta\mathfrak{L}$ には $\partial_\mu\bar{\psi}$ の項はないので $\bar{\psi}$ の項は寄与しない。

オイラー・ラグランジアン方程式から

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\psi} = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} \right) \cdots \textcircled{4}$$

$$\partial_\mu(\delta\psi) = \delta(\partial_\mu\psi) \text{ なるので}$$

$$\delta\mathfrak{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} \right) \delta\psi + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} \partial_\mu(\delta\psi) = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} \delta\psi \right) = 0 \cdots \textcircled{5}$$

$$\delta\mathfrak{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} ig\theta\psi \right) = ig\theta \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} \psi \right) = 0$$

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} = i\bar{\psi}\gamma^\mu \text{ なるので}$$

$$\delta\mathfrak{L} = ig\theta \partial_\mu (i\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = 0 \cdots \textcircled{6}$$

$$\delta\mathfrak{L} = i\theta \partial_\mu (ig\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = 0$$

$$j^\mu = g\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \text{ とおけば}$$

$$i\theta \partial_\mu (i(j^\mu)) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\theta \partial_\mu j^\mu = 0$$

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \cdots \textcircled{7}$$

$$4 \text{ 元カレント密度を } j^\mu \text{ とおくと } j^\mu = (\rho, \vec{j}) \cdots \textcircled{8}$$

$$\partial_{\mu} j^{\mu} = \partial_0 \rho + \partial_1 j^1 + \partial_2 j^2 + \partial_3 j^3 = \frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} j^1 + \frac{\partial}{\partial y} j^2 + \frac{\partial}{\partial z} j^3 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} j^1 + \frac{\partial}{\partial y} j^2 + \frac{\partial}{\partial z} j^3 = \frac{\partial}{\partial t} \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad \dots \textcircled{9}$$

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} j^1 + \frac{\partial}{\partial y} j^2 + \frac{\partial}{\partial z} j^3 \right) dt dx dy dz &= \int \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \right) dt dx dy dz = 0 \\ &= \int \frac{\partial}{\partial t} \rho dt dx dy dz + dt \int \vec{\nabla} \cdot \vec{j} dx dy dz = 0 \quad \dots \textcircled{10} \end{aligned}$$

無限遠においては

$$\vec{j} = 0$$

$$\int \rho dx dy dz + dt \int \vec{j} \cdot \vec{ds} = 0$$

$$dQ + dt \cdot 0 = 0$$

$$\therefore \frac{dQ}{dt} = 0 \quad \dots \textcircled{11}$$

Q はバリオン数（レプトン数）を示す。

（結論）大域的ゲージ不変ならば電気量は保存される。

電気量保存則はゲージ対称性から導かれる。