# 量子コンピュータ入門

## 量子テレポーテーションまで

鹿児島現代物理勉強会

御領　悟志

2024.2.10

# 目 次

# 古典コンピュータ

1ビット（bit）で2通りの情報を表現できる

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

しかし

$|0\rangle$ と $|1\rangle$ の2つの情報を同時に表すことはできない

3ビット（bit）

$$|0\ 0\ 0\rangle$$
$$|0\ 0\ 1\rangle$$
$$|0\ 1\ 0\rangle$$
$$|0\ 1\ 1\rangle$$
$$|1\ 0\ 0\rangle$$
$$|1\ 0\ 1\rangle$$
$$|1\ 1\ 0\rangle$$
$$|1\ 1\ 1\rangle$$

$2^3 = 8$ 通り

の情報表現が可能である。

nビット（bit）では

$2^n$ 通りの情報を表現できる

しかし1度に表せる情報は1つだけ

# q(量子)ビットについて(1)

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

量子力学においては
$|0\rangle$ と $|1\rangle$ の2つの状態関数を重ね合わせて
同時に2つの状態を表すことが可能である。

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$\alpha, \beta \in C \qquad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

を満たす係数を求めると

$$\alpha = e^{i\gamma}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \qquad \beta = e^{i\eta}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$|\psi\rangle = e^{i\gamma}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i(\eta-\gamma)}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle\right]$$

$\phi = \eta - \gamma$ 　位相差に関して $\phi$ とおくと

$$|\psi\rangle = \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle\right]$$

と書ける。 $\boxed{e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi}$

# q(量子)ビットについて(2)

★入力（INPUT）　　　　★出力（OUTPUT）

状態関数は、ユニタリ行列により変換される。　※行列補足参照

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \Rightarrow U \Rightarrow U|\psi\rangle = U(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \alpha U|0\rangle + \beta U|1\rangle$$

入力　　出力

$$|\psi(t_1)\rangle \Rightarrow \boxed{U_{12}} \Rightarrow |\psi(t_2)\rangle$$

シュレディンガー方程式　　Hはハミルトニアン

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = -i\frac{H}{\hbar}|\psi\rangle \Rightarrow |\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\psi(0)\rangle$$

$$|\psi(t)\rangle \Rightarrow U_1 \Rightarrow U_2 \Rightarrow \quad \Rightarrow U_n \Rightarrow |\psi(t')\rangle$$

$$U_n \cdots U_3U_2U_1|\psi\rangle$$

時間経過

# q(量子)ビットについて(3)

$|\mathbf{0}\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ と $|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ の二つの量子状態の重ね合わせ

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

$\theta$ 振幅の変化を表す

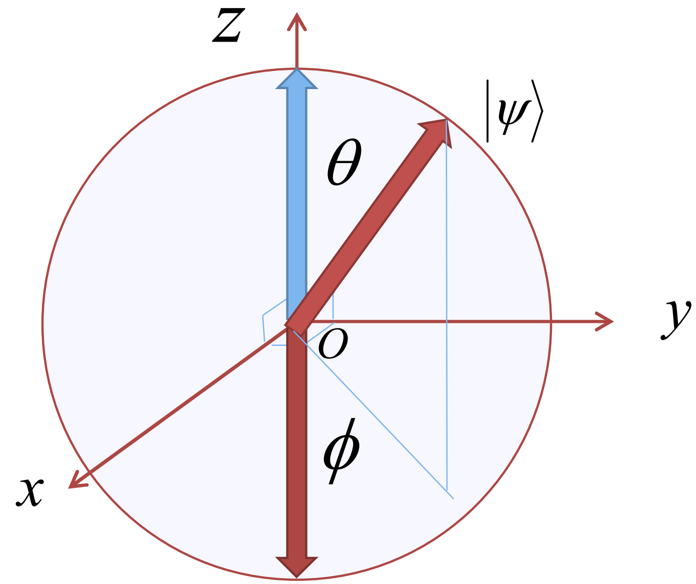
$\phi$ 位相の変化を表す

無数の量子状態が表示できる

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle$$

ブロッホ球

$\left[\begin{array}{l} \theta = 0^\circ \\ \phi = 0^\circ \end{array}\right.$ $|\mathbf{0}\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$




$\left[\begin{array}{l} \theta = 180^\circ \\ \phi = 0^\circ \end{array}\right.$ $|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

# q(量子)ビットについて(4)

各軸方向の量子状態

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle$$

$\theta = 90^\circ \quad \phi = 0^\circ$

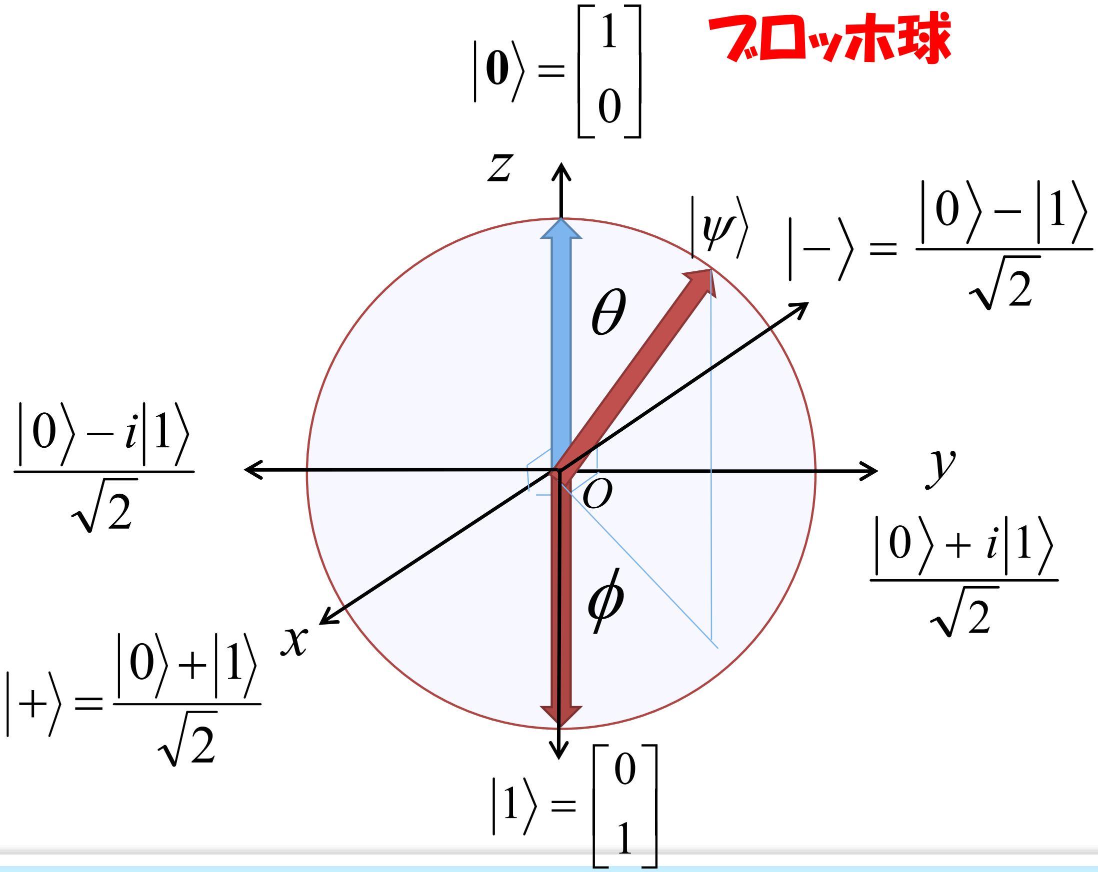
$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

$\theta = 90^\circ \quad \phi = 90^\circ$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + i\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle = \frac{|0\rangle + i|1\rangle}{\sqrt{2}}$$

$\phi$ は、x軸からy軸への位相回転(変化)を表している



# 量子コンピュータ

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

量子コンピュータのqビットは

$|0\rangle$ 　 $|1\rangle$ の2つの状態関数を重ね合わせて

2つの状態を同時に表すことが可能である。

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle$$

qビット1個で2通りの情報を同時に表わせる。

qビット（bit）n個では

$2^n$ 通りの情報を同時に表現できる。

$2^n$ 通りの値を同時に入力

$2^n$ 通りの答えを同時に出力

# 2量子ビットのテンソル積(1)

2-qubitのテンソル積の定義

計算規則

$$a=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$a\otimes b=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1\times\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \\ a_2\times\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1b_1 \\ a_1b_2 \\ a_2b_1 \\ a_2b_2 \end{bmatrix}$$

# 2量子ビットのテンソル積(2)

2-qubitのテンソル積の定義

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$|00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ 0 \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$|10\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle = \begin{bmatrix} 0 \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ 1 \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$|01\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle = \begin{bmatrix} 1 \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ 0 \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$|11\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ 1 \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

# 2量子ビットのテンソル積(3)

次の4つの列ベクトルを基底ベクトルとして、状態関数が線形結合で表現される。

$$|n_1\rangle = |00\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} \quad |n_2\rangle = |01\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} \quad |n_3\rangle = |10\rangle = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} \quad |n_4\rangle = |11\rangle = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} \Rightarrow |\psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|10\rangle + \delta|11\rangle = \begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\\\delta\end{bmatrix}$$

$$\langle 00\|00\rangle = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} = 1 \quad \langle 01\|01\rangle = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} = 1 \quad \langle 10\|10\rangle = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} = 1 \quad \langle 11\|11\rangle = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} = 1$$

となることから $\therefore \left\langle n_k \| n_s \right\rangle = \delta_{ks}$ 正規直交系となる。

状態関数の定義から $\langle\psi\|\psi\rangle = \begin{bmatrix}\alpha & \beta & \gamma & \delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\\\delta\end{bmatrix} = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$

# Pauli-X gates(NOTゲート)

1-qubitの量子演算

$$|a\rangle \Rightarrow [X] \Rightarrow X|a\rangle = |\bar{a}\rangle$$

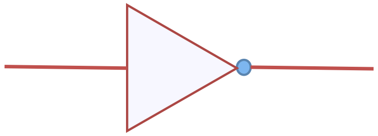
$$\bar{a} = a \oplus 1$$

$$\bar{0} = 0 \oplus 1 = 1$$

$$\bar{1} = 1 \oplus 1 = 0$$

$$X|0\rangle = |\bar{0}\rangle = |1\rangle$$

$$X|1\rangle = |\bar{1}\rangle = |0\rangle$$

$|a\rangle$  $|\bar{a}\rangle$

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$ と仮定する。

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

※ 行列補足参照

$$X|0\rangle = |1\rangle \qquad X|0\rangle = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad a = 0 \quad c = 1$$

$$X|1\rangle = |0\rangle \qquad X|1\rangle = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad b = 1 \quad d = 0$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \sigma_x$$

# Pauli-Y gates

1-qubitの量子演算

$$|a\rangle \Rightarrow [Y] \Rightarrow Y|a\rangle = (-1)^a i|\bar{a}\rangle$$

$$Y|0\rangle = i|\bar{0}\rangle = i|1\rangle = i\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\i\end{bmatrix}$$

$$Y|1\rangle = -i|\bar{1}\rangle = -i|0\rangle = -i\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-i\\0\end{bmatrix}$$

$$Y|0\rangle = i|1\rangle \quad Y|0\rangle = \begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = i\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad a = 0 \quad c = i$$

$$Y|1\rangle = -i|0\rangle \quad Y|1\rangle = \begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = -i\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad b = -i \quad d = 0$$

$$Y = \begin{bmatrix}0 & -i\\i & 0\end{bmatrix} = \sigma_y$$

# Pauli-Z gates(位相変換)

1-qubitの量子演算

$$|a\rangle \quad \Rightarrow \quad [Z] \quad \Rightarrow \quad Z|a\rangle = (-1)^a |a\rangle$$

$$Z|0\rangle = |0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Z|1\rangle = -|1\rangle = -\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$Z|0\rangle = |0\rangle \quad Z|0\rangle = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad a = 1 \quad c = 0$$

$$Z|1\rangle = -|1\rangle \quad Z|1\rangle = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad b = 0 \quad d = -1$$

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \sigma_z$$

# Pauli-XYZ gates

1-qubitの量子演算　　Pauli行列と同じ行列要素で一次変換をする。

$$\sigma_x = X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_y = Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_z = Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$i\sigma_x\sigma_z = iXZ = i\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = Y$$

$$X^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Y^2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Z^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X|\psi\rangle = X(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \alpha X|0\rangle + \beta X|1\rangle = \beta|0\rangle + \alpha|1\rangle$$

$$Y|\psi\rangle = Y(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \alpha Y|0\rangle + \beta Y|1\rangle = -i\beta|0\rangle + i\alpha|1\rangle$$

$$Z|\psi\rangle = Z(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \alpha Z|0\rangle + \beta Z|1\rangle = \alpha|0\rangle - \beta|1\rangle$$

# Hadamard-gates（1）

※ 行列補足参照

$$|a\rangle \quad \rightarrow \quad H|a\rangle = \sum_{b=0,1} \frac{1}{\sqrt{2}} (-1)^{a \cdot b} |b\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ (-1)^{a \cdot 0} |0\rangle + (-1)^{a \cdot 1} |1\rangle \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ |0\rangle + (-1)^{a} |1\rangle \right\}$$

$$H|a\rangle = \frac{|0\rangle + (-1)^a |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$H\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$H\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$H|0\rangle = \frac{|0\rangle + (-1)^0 |1\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

均等に量子状態を発生させる。位相変化はない。

$$H|1\rangle = \frac{|0\rangle + (-1)^1 |1\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

均等に量子状態を発生させるが、位相がπずれている。

# Hadamard-gates(２)

$$H\left(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}H|0\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}H|1\rangle$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=\left(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{2}\right)+\left(\frac{|0\rangle-|1\rangle}{2}\right)=|0\rangle$$

$$H\left(\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}H|0\rangle-\frac{1}{\sqrt{2}}H|1\rangle$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=\left(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{2}\right)-\left(\frac{|0\rangle-|1\rangle}{2}\right)=|1\rangle$$

２回変換すると元の状態に戻ることがわかる

$$H=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$H^2=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

# P-gates(1)

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle \quad \Rightarrow \quad |\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$P(\phi_1) = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & e^{i\phi_1}\end{bmatrix}$ とすると $P(\phi_1)|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & e^{i\phi_1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & e^{i\phi_1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

$$P(\phi_1)|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\begin{bmatrix}0\\e^{i\phi_1}\end{bmatrix} \quad P(\phi_1)|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + e^{i\phi}e^{i\phi_1}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$P(\phi_1)|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + e^{i(\phi+\phi_1)}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

位相Φを更にΦ$_1$回転させることを示す

# P-gates(2)

$$P(\phi)=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & e^{i\phi}\end{bmatrix}$$

$$H\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$$P(\phi)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & e^{i\phi}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$P(\phi)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & e^{i\phi}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\e^{i\phi}\end{bmatrix}$$

$$P(\phi)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & e^{i\phi}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=e^{i\phi}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\e^{i\phi}\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\e^{i\phi}\end{bmatrix}$$

$$P(\phi)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\cos\left(\frac{90^\circ}{2}\right)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+e^{i\phi}\sin\left(\frac{90^\circ}{2}\right)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

# S-gates

$$P(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{bmatrix}$$

$\phi = \dfrac{\pi}{2}$ の時は

$$P\left(\frac{\pi}{2}\right) = S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

$$S|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$S|1\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}|1\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = i\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

# T-gates

$$P\left(\frac{\pi}{4}\right) = T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi}$$

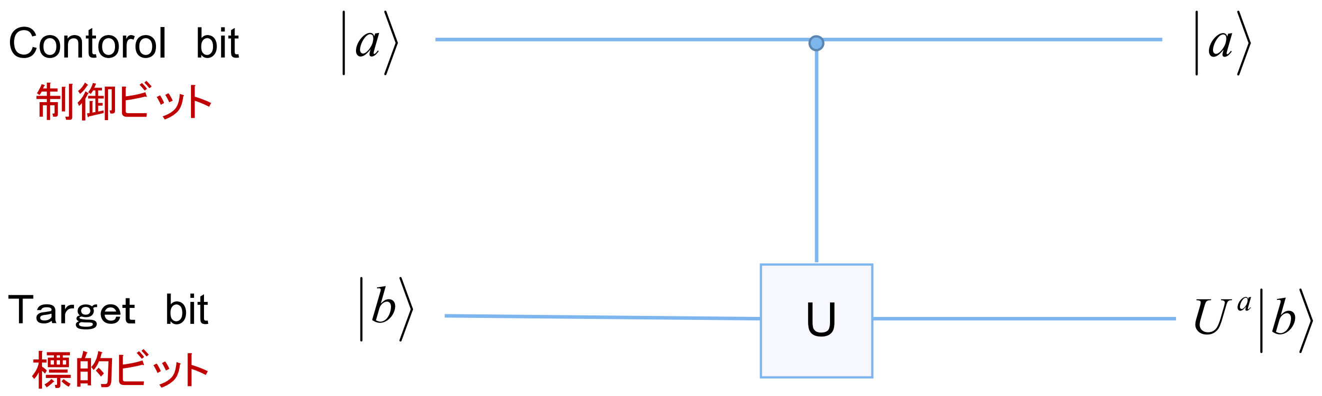
$$T|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix}|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T|1\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix}|1\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{i\frac{\pi}{4}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix}$$

# Controlled-U gate

2-qubitの量子演算




$|a\rangle = 0$ のときには $|b\rangle$

$|a\rangle = 1$ のときには $U|b\rangle$

一方のビットが他方のビットの働きを制御する。

# Controlled-Not gate

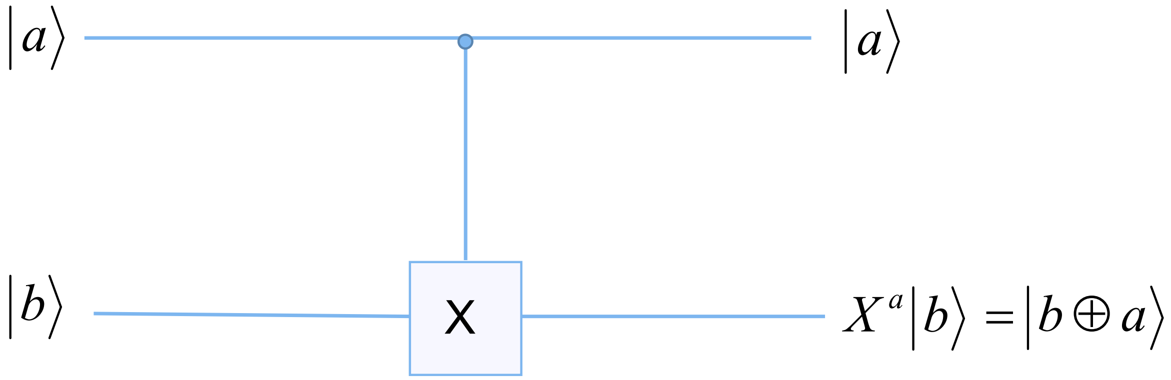
2-qubitの量子演算

$$|a\rangle \otimes |b\rangle = |a,b\rangle$$

$$|a,b\rangle \to |a, b\oplus a\rangle$$

Contorol bit
制御ビット

Target bit
標的ビット




$$|00\rangle \to |0,0\oplus 0\rangle \to |00\rangle$$

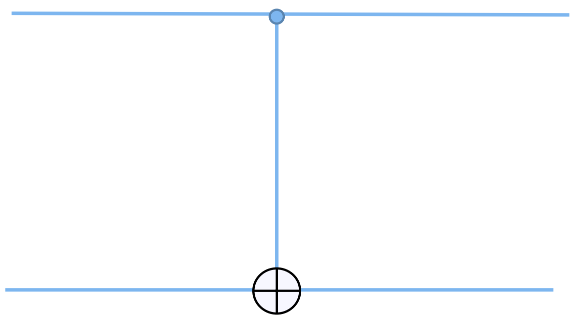
$$|01\rangle \to |0,1\oplus 0\rangle \to |01\rangle$$

$$|10\rangle \to |1,0\oplus 1\rangle \to |11\rangle$$

$$|11\rangle \to |1,1\oplus 1\rangle \to |10\rangle$$

$|a\rangle = 0$ のときには $|b\oplus 0\rangle = |b\rangle$

$|a\rangle = 1$ のときには $|b\oplus 1\rangle = |\bar{b}\rangle$



# ベル基底状態の生成(1)

2-qubitの量子演算

$$|a\rangle\otimes|b\rangle = |a\rangle|b\rangle = |a,b\rangle$$

$$|a,b\rangle \to |a, b\oplus a\rangle$$

$$H|a\rangle = \frac{|0\rangle + (-1)^a|1\rangle}{\sqrt{2}}$$

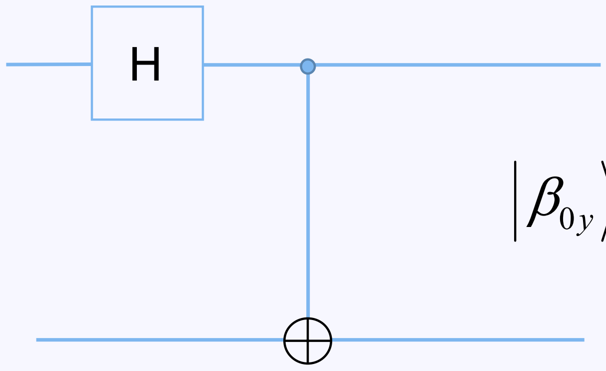
Contorol bit $x$ $|0\rangle$

制御ビット

$$|00\rangle = |0\rangle|0\rangle$$

Target bit $y$ $|0\rangle$ $|1\rangle$

標的ビット




$|\beta_{0y}\rangle$

Hadamard-gates　　Controlled-Not

$$x=0 \quad |00\rangle = |0\rangle|0\rangle \qquad H|0\rangle\otimes|0\rangle \to \left(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)|0\rangle \to \left(\frac{|0\rangle|0\rangle+|1\rangle|0\rangle}{\sqrt{2}}\right) \to \left(\frac{|0\rangle|0\rangle+|1\rangle|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

$$|0y\rangle \longrightarrow |\beta_{0y}\rangle$$

$$|xy\rangle \quad |01\rangle = |0\rangle|1\rangle \qquad H|0\rangle\otimes|1\rangle \to \left(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)|1\rangle \to \left(\frac{|0\rangle|1\rangle+|1\rangle|1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \to \left(\frac{|0\rangle|1\rangle+|1\rangle|0\rangle}{\sqrt{2}}\right) \quad |\beta_{xy}\rangle$$

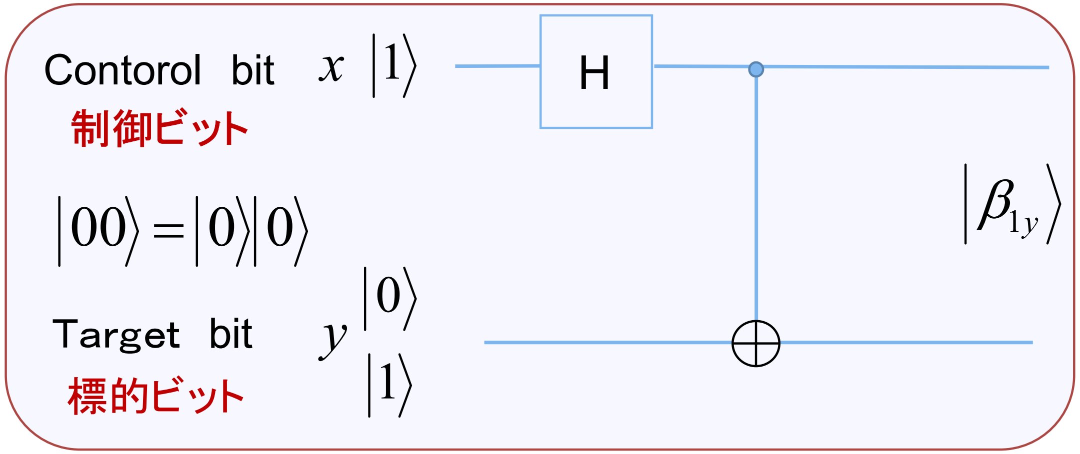
# ベル基底状態の生成(2)

2-qubitの量子演算

$$|a\rangle \otimes |b\rangle = |a\rangle|b\rangle = |a,b\rangle$$

$$|a,b\rangle \to |a, b \oplus a\rangle$$

$$H|a\rangle = \frac{|0\rangle + (-1)^a |1\rangle}{\sqrt{2}}$$




**Hadamard-gates** **Controlled-Not**

$x=1$

$$|10\rangle = |1\rangle|0\rangle \qquad H|1\rangle \otimes |0\rangle \to \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)|0\rangle \to \left(\frac{|0\rangle|0\rangle - |1\rangle|0\rangle}{\sqrt{2}}\right) \to \left(\frac{|0\rangle|0\rangle - |1\rangle|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

$$|1y\rangle \longrightarrow |\beta_{1y}\rangle$$

$$|xy\rangle \qquad |11\rangle = |1\rangle|1\rangle \qquad H|1\rangle \otimes |1\rangle \to \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)|1\rangle \to \left(\frac{|0\rangle|1\rangle - |1\rangle|1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \to \left(\frac{|0\rangle|1\rangle - |1\rangle|0\rangle}{\sqrt{2}}\right) \qquad |\beta_{xy}\rangle$$

# ベル基底状態の生成(3)

## 2-qubitの量子演算

$$|a\rangle|b\rangle = |a,b\rangle$$

$$|a,b\rangle \rightarrow |a,b\oplus a\rangle$$

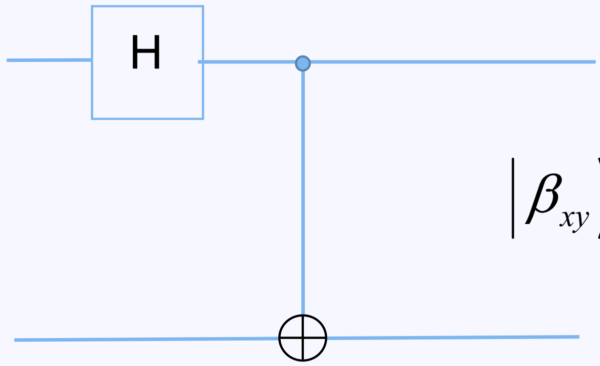
Contorol bit $x$ $|0\rangle$ $|1\rangle$

制御ビット

$$|00\rangle = |0\rangle|0\rangle$$

Target bit $y$ $|0\rangle$ $|1\rangle$

標的ビット




$$|\beta_{xy}\rangle$$

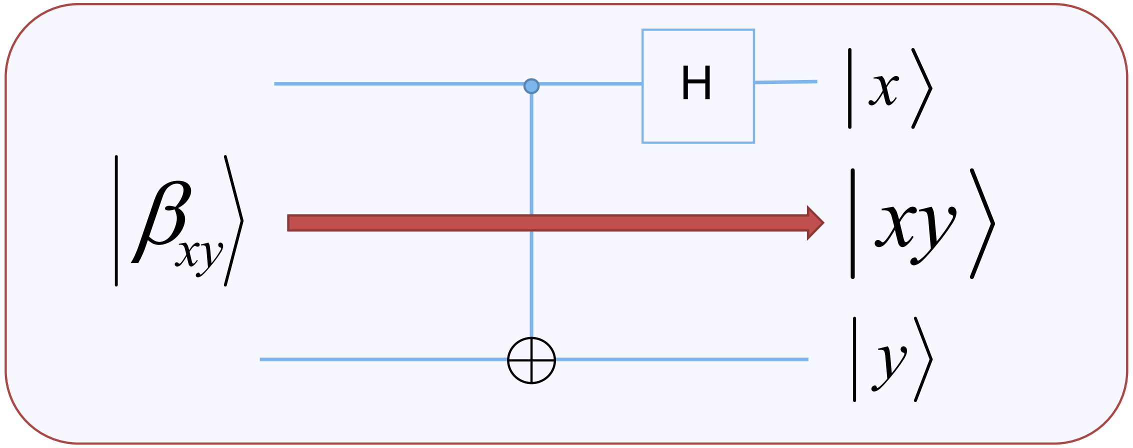
$$|0\rangle|0\rangle \rightarrow \left(\frac{|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \qquad |1\rangle|0\rangle \rightarrow \left(\frac{|0\rangle|0\rangle - |1\rangle|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

$$|0\rangle|1\rangle \rightarrow \left(\frac{|0\rangle|1\rangle + |1\rangle|0\rangle}{\sqrt{2}}\right) \qquad |1\rangle|1\rangle \rightarrow \left(\frac{|0\rangle|1\rangle - |1\rangle|0\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

**Hadamard-gatesとControlled-Not gate**
の組み合わせで4つのベル基底状態を生成できる。

# ベル基底状態の復元(１)

**Controlled-Notgate**と**Hadamard-gates**の組み合わせで４つのベル基底状態を作った元の状態に復元できる。




**Controlled-Not**　　**Hadamard-gates**

$$|\beta_{00}\rangle=\left(\frac{|0\rangle|0\rangle+|1\rangle|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\rightarrow\left(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)|0\rangle\rightarrow|0\rangle|0\rangle$$

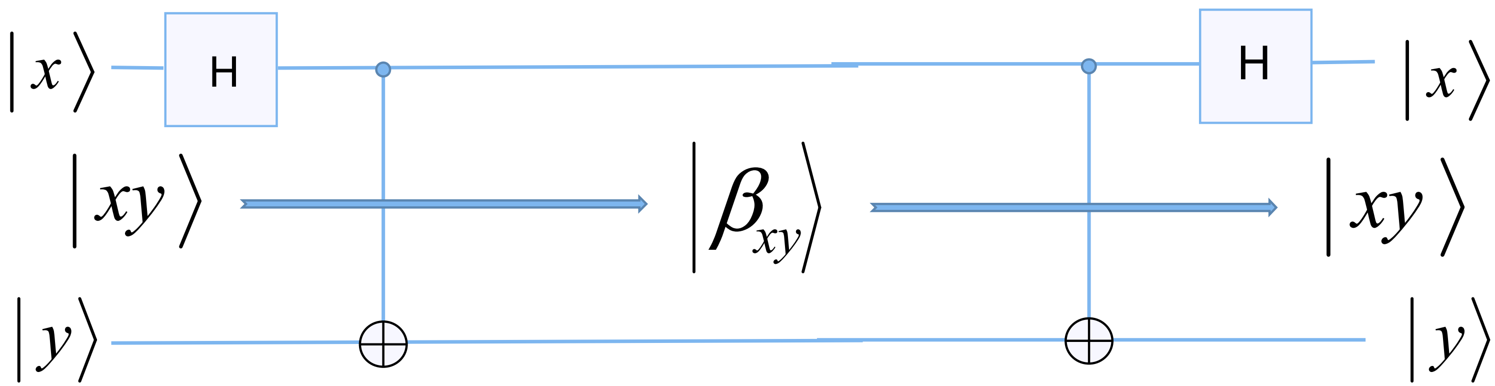
$$|\beta_{01}\rangle=\left(\frac{|0\rangle|1\rangle+|1\rangle|0\rangle}{\sqrt{2}}\right)\rightarrow\left(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)|1\rangle\rightarrow|0\rangle|1\rangle$$

**Controlled-Not**　　**Hadamard-gates**

$$|\beta_{10}\rangle=\left(\frac{|0\rangle|0\rangle-|1\rangle|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\rightarrow\left(\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)|0\rangle\rightarrow|1\rangle|0\rangle$$

$$|\beta_{11}\rangle=\left(\frac{|0\rangle|1\rangle-|1\rangle|0\rangle}{\sqrt{2}}\right)\rightarrow\left(\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)|1\rangle\rightarrow|1\rangle|1\rangle$$

# ベル基底状態の復元(2)




$$H|a\rangle = \sum_{b=0,1}\frac{1}{\sqrt{2}}(-1)^{a\cdot b}|b\rangle$$

$$|0\rangle|y\rangle \to H|0\rangle\otimes|y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle+(-1)^0|1\rangle\right)\otimes|y\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle|y\rangle+|1\rangle|y\rangle\right) \to \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle|y\rangle+|1\rangle|\bar{y}\rangle\right)$$

$$|1\rangle|y\rangle \to H|1\rangle\otimes|y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle+(-1)^1|1\rangle\right)\otimes|y\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle|y\rangle-|1\rangle|y\rangle\right) \to \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle|y\rangle-|1\rangle|\bar{y}\rangle\right)$$

**Controlled-Notgate**と**Hadamard-gates**の組み合わせで4つのベル基底状態を作った元の状態に復元できる。

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle|y\rangle+|1\rangle|\bar{y}\rangle\right) \to \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle+|1\rangle\right)|y\rangle \to \frac{H}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle+|1\rangle\right)|y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(H|0\rangle+H|1\rangle\right)|y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}+\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)|y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2|0\rangle}{\sqrt{2}}\right)|y\rangle = |0\rangle|y\rangle$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle|y\rangle-|1\rangle|\bar{y}\rangle\right) \to \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle-|1\rangle\right)|y\rangle \to \frac{H}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle-|1\rangle\right)|y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(H|0\rangle-H|1\rangle\right)|y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}-\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)|y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)|y\rangle = |1\rangle|y\rangle$$

# ベル基底への変換（１）

$|0\rangle$ と $|1\rangle$ は、**Hadamard**変換により次の基底に変換される。 ➡ $|+\rangle = \left(\dfrac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$ $|-\rangle = \left(\dfrac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$

$$|+\rangle^2 = \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{|0\rangle^2 + |1\rangle^2 + 2|0\rangle|1\rangle}{\left(\sqrt{2}\right)^2}\right) = \left(\frac{|0\rangle^2 + |1\rangle^2}{2}\right) = \frac{1+1}{2} = 1$$

$$|-\rangle^2 = \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{|0\rangle^2 + |1\rangle^2 - 2|0\rangle|1\rangle}{\left(\sqrt{2}\right)^2}\right) = \left(\frac{|0\rangle^2 + |1\rangle^2}{2}\right) = \frac{1+1}{2} = 1$$

$$|+\rangle + |-\rangle = \frac{2|0\rangle}{\sqrt{2}} \qquad \frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}} = |0\rangle \qquad\qquad |+\rangle - |-\rangle = \frac{2|1\rangle}{\sqrt{2}} \qquad \frac{|+\rangle - |-\rangle}{\sqrt{2}} = |1\rangle$$

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \alpha\left(\frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}}\right) + \beta\left(\frac{|+\rangle - |-\rangle}{\sqrt{2}}\right) \Longrightarrow |\psi\rangle = \frac{(\alpha+\beta)}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{(\alpha-\beta)}{\sqrt{2}}|-\rangle$$

# 量子テレポーテーションとは

適当な量子状態 $|\psi\rangle_V = \alpha|0\rangle_V + \beta|1\rangle_V$ を遠隔地に送り届けるテクニック

- 送信者Aliceと受信者Bobが、お互いにエンタングル(量子もつれ)した量子系を保持している。
- 送信者Aliceと受信者Bobが古典的な通信路を確保している。

送信側

$|\psi\rangle_V = \alpha|0\rangle_V + \beta|1\rangle_V$ を制御bitとしエンタングルした量子ビットの片方(Alice側)にcontrolled-gate操作をする。

$|\psi\rangle_V = \alpha|0\rangle_V + \beta|1\rangle_V$ にHadamard-gate操作をする。

この二つのビットの0、1を測定する。その測定結果x、yを(古典的に)送信先Bobに伝える。

受信側

送信者Aliceから測定結果x,yを受け取る。

y=1なら、エンタングルした量子ビットの片方(Bob側)にXゲートを操作する。

x=1なら、エンタングルした量子ビットの片方(Bob側)にZゲートを操作する。

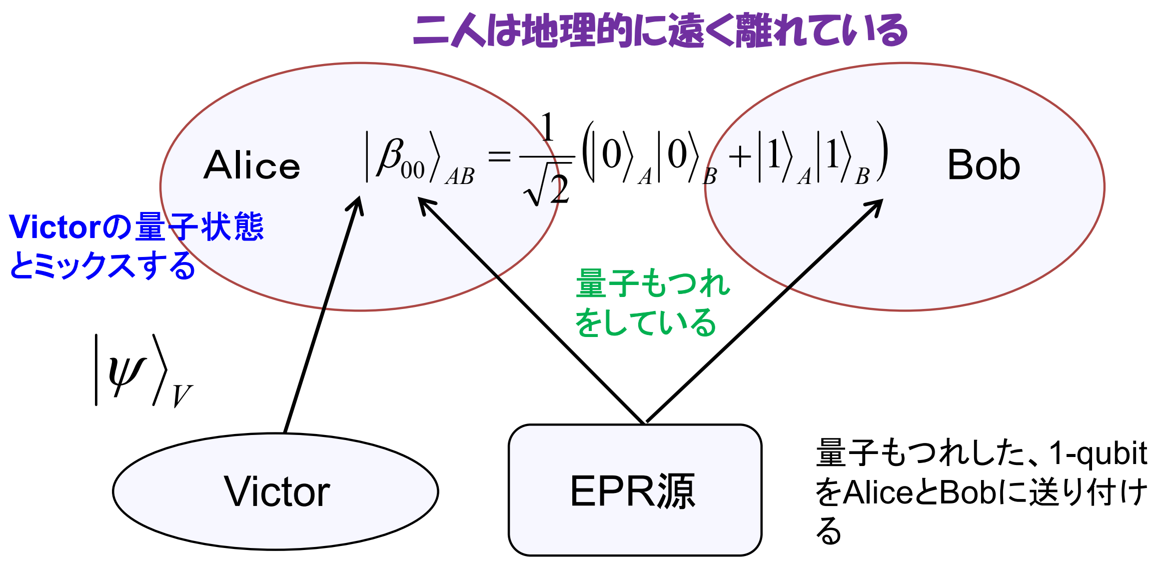
Bob側の量子ビットが $|\psi\rangle_V = \alpha|0\rangle_V + \beta|1\rangle_V$ となり量子情報の受け取りが完了。

# 量子テレポーテーション（1）

$$|\psi\rangle_V = \alpha|0\rangle_V + \beta|1\rangle_V$$

$$|\beta_{00}\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_A|0\rangle_B + |1\rangle_A|1\rangle_B\right)$$

初期状態




**目標** ⇨ Vicorの持つ量子情報を完全にBobに移転させること。

$$|\psi\rangle_V|\beta_{00}\rangle_{AB} = \frac{1}{2}|\beta_{00}\rangle_{VA}|\psi\rangle_B + \frac{1}{2}|\beta_{01}\rangle_{VA}Z|\psi\rangle_B + \frac{1}{2}|\beta_{10}\rangle_{VA}X|\psi\rangle_B + \frac{1}{2}|\beta_{11}\rangle_{VA}XZ|\psi\rangle_B$$

VとABの状態の積　　　VAとBの状態の積の基底により状態を表している

# 量子テレポーテーション(2)

$$|\psi\rangle_V|\beta_{00}\rangle_{AB}=\frac{1}{2}|\beta_{00}\rangle_{VA}|\psi\rangle_B+\frac{1}{2}|\beta_{01}\rangle_{VA}X|\psi\rangle_B+\frac{1}{2}|\beta_{10}\rangle_{VA}Z|\psi\rangle_B+\frac{1}{2}|\beta_{11}\rangle_{VA}XZ|\psi\rangle_B$$

上記式の左辺が、ベル基底で展開されると右辺の式に展開されることを証明をする。

①左辺の計算

$$|\psi\rangle_V|\beta_{00}\rangle_{AB}=(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)\left(\frac{|0\rangle|0\rangle+|1\rangle|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)(|0\rangle|0\rangle+|1\rangle|1\rangle)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|0\rangle|0\rangle|0\rangle+\alpha|0\rangle|1\rangle|1\rangle+\beta|1\rangle|0\rangle|0\rangle+\beta|1\rangle|1\rangle|1\rangle)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|000\rangle+\alpha|011\rangle+\beta|100\rangle+\beta|111\rangle)=\frac{\alpha|000\rangle}{\sqrt{2}}+\frac{\alpha|011\rangle}{\sqrt{2}}+\frac{\beta|100\rangle}{\sqrt{2}}+\frac{\beta|111\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{|\psi\rangle_V|\beta_{00}\rangle_{AB}=\frac{\alpha|000\rangle}{\sqrt{2}}+\frac{\alpha|011\rangle}{\sqrt{2}}+\frac{\beta|100\rangle}{\sqrt{2}}+\frac{\beta|111\rangle}{\sqrt{2}}}$$

# 量子テレポーテーション（3）

$$|\psi\rangle_V|\beta_{00}\rangle_{AB}=\frac{1}{2}|\beta_{00}\rangle_{VA}|\psi\rangle_B+\frac{1}{2}|\beta_{01}\rangle_{VA}X|\psi\rangle_B+\frac{1}{2}|\beta_{10}\rangle_{VA}Z|\psi\rangle_B+\frac{1}{2}|\beta_{11}\rangle_{VA}XZ|\psi\rangle_B$$

②右辺の計算

$$|\beta_{00}\rangle_{VA}|\psi\rangle_B=\left(\frac{|0\rangle|0\rangle+|1\rangle|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)=\frac{\alpha|000\rangle}{\sqrt{2}}+\frac{\alpha|110\rangle}{\sqrt{2}}+\frac{\beta|001\rangle}{\sqrt{2}}+\frac{\beta|111\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$|\beta_{01}\rangle_{VA}X|\psi\rangle_B=\left(\frac{|0\rangle|1\rangle+|1\rangle|0\rangle}{\sqrt{2}}\right)(\alpha|1\rangle+\beta|0\rangle)=\frac{\alpha|011\rangle}{\sqrt{2}}+\frac{\alpha|101\rangle}{\sqrt{2}}+\frac{\beta|010\rangle}{\sqrt{2}}+\frac{\beta|100\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$|\beta_{10}\rangle_{VA}Z|\psi\rangle_B=\left(\frac{|0\rangle|0\rangle-|1\rangle|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)(\alpha|0\rangle-\beta|1\rangle)=\frac{\alpha|000\rangle}{\sqrt{2}}-\frac{\alpha|110\rangle}{\sqrt{2}}-\frac{\beta|001\rangle}{\sqrt{2}}+\frac{\beta|111\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$|\beta_{11}\rangle_{VA}XZ|\psi\rangle_B=\left(\frac{|0\rangle|1\rangle-|1\rangle|0\rangle}{\sqrt{2}}\right)(\alpha|1\rangle-\beta|0\rangle)=\frac{\alpha|011\rangle}{\sqrt{2}}-\frac{\alpha|101\rangle}{\sqrt{2}}-\frac{\beta|010\rangle}{\sqrt{2}}+\frac{\beta|100\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$|\beta_{00}\rangle_{VA}|\psi\rangle_B+|\beta_{01}\rangle_{VA}X|\psi\rangle_B+|\beta_{10}\rangle_{VA}Z|\psi\rangle_B\frac{1}{2}|\beta_{11}\rangle_{VA}XZ|\psi\rangle_B=\frac{2\alpha|000\rangle}{\sqrt{2}}+\frac{2\alpha|011\rangle}{\sqrt{2}}+\frac{2\beta|100\rangle}{\sqrt{2}}+\frac{2\beta|111\rangle}{\sqrt{2}}$$

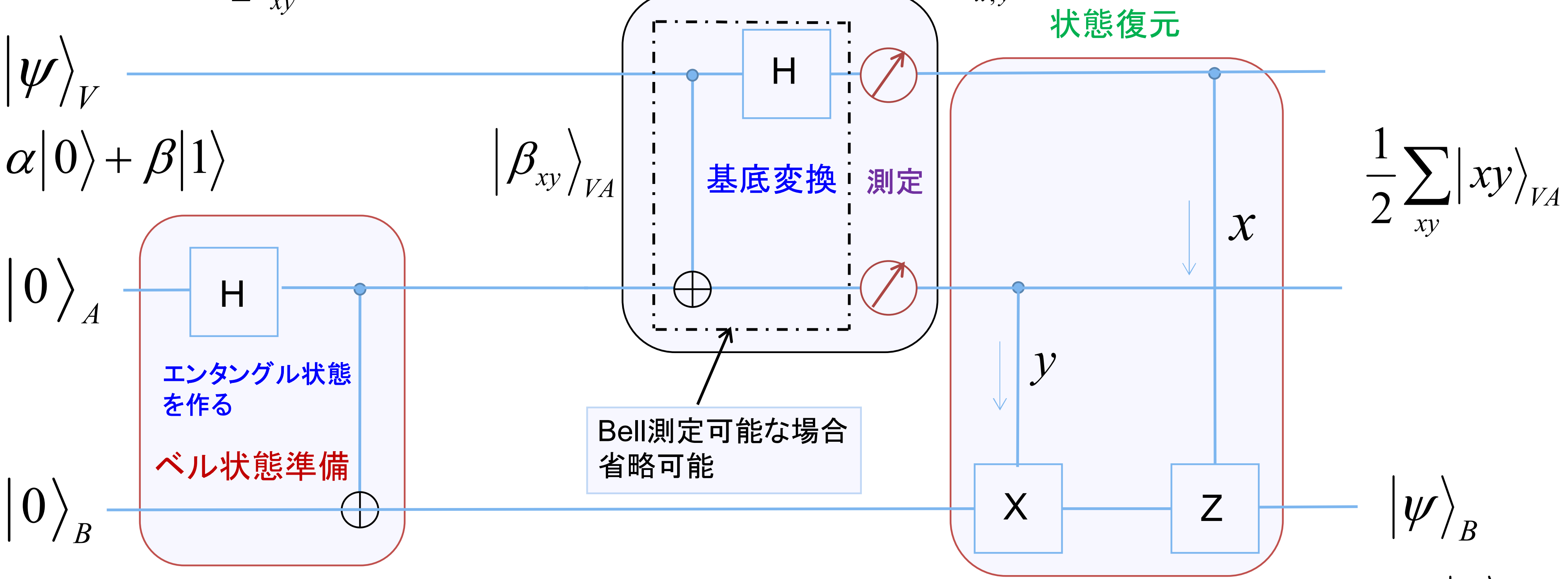
$$\boxed{\frac{1}{2}|\beta_{00}\rangle_{VA}|\psi\rangle_B+\frac{1}{2}|\beta_{01}\rangle_{VA}X|\psi\rangle_B+\frac{1}{2}|\beta_{10}\rangle_{VA}Z|\psi\rangle_B+\frac{1}{2}|\beta_{11}\rangle_{VA}XZ|\psi\rangle_B=\frac{\alpha|000\rangle}{\sqrt{2}}+\frac{\alpha|011\rangle}{\sqrt{2}}+\frac{\beta|100\rangle}{\sqrt{2}}+\frac{\beta|111\rangle}{\sqrt{2}}}$$

$$|\psi\rangle=\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle$$
$$X|\psi\rangle=\beta|0\rangle+\alpha|1\rangle$$
$$Y|\psi\rangle=-i\beta|0\rangle+i\alpha|1\rangle$$
$$Z|\psi\rangle=\alpha|0\rangle-\beta|1\rangle$$
$$XZ|\psi\rangle=\alpha|1\rangle-\beta|0\rangle$$

$$|\beta_{00}\rangle=\frac{|0\rangle|0\rangle+|1\rangle|1\rangle}{\sqrt{2}}$$
$$|\beta_{01}\rangle=\frac{|0\rangle|1\rangle+|1\rangle|0\rangle}{\sqrt{2}}$$
$$|\beta_{10}\rangle=\frac{|0\rangle|0\rangle-|1\rangle|1\rangle}{\sqrt{2}}$$
$$|\beta_{11}\rangle=\frac{|0\rangle|1\rangle-|1\rangle|0\rangle}{\sqrt{2}}$$

# 量子テレポーテーションの流れ図

$$|\psi\rangle_V|\beta_{00}\rangle_{AB}=\frac{1}{2}\sum_{xy}|\beta_{xy}\rangle_{VA}X^yZ^x|\psi\rangle_B \Rightarrow \sum_{x,y}\frac{1}{2}|xy\rangle_{VA}X^yZ^x|\psi\rangle_B$$




VictorからBobに量子状態が転送されたことになる $\Rightarrow$ $\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle$

# ベル基底による式の展開(1)

$$|\beta_{00}\rangle=\frac{|0\rangle|0\rangle+|1\rangle|1\rangle}{\sqrt{2}}\qquad |\beta_{01}\rangle=\frac{|0\rangle|1\rangle+|1\rangle|0\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$|\beta_{10}\rangle=\frac{|0\rangle|0\rangle-|1\rangle|1\rangle}{\sqrt{2}}\qquad |\beta_{11}\rangle=\frac{|0\rangle|1\rangle-|1\rangle|0\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{|\beta_{00}\rangle+|\beta_{10}\rangle}{\sqrt{2}}=|0\rangle|0\rangle\qquad \frac{|\beta_{01}\rangle+|\beta_{11}\rangle}{\sqrt{2}}=|0\rangle|1\rangle$$

$$\frac{|\beta_{00}\rangle-|\beta_{10}\rangle}{\sqrt{2}}=|1\rangle|1\rangle\qquad \frac{|\beta_{01}\rangle-|\beta_{11}\rangle}{\sqrt{2}}=|1\rangle|0\rangle$$

$$|\psi\rangle_V|\beta_{00}\rangle_{AB}=\frac{\alpha|000\rangle}{\sqrt{2}}+\frac{\alpha|011\rangle}{\sqrt{2}}+\frac{\beta|100\rangle}{\sqrt{2}}+\frac{\beta|111\rangle}{\sqrt{2}}$$

をベル基底により式の展開をする

$$=\left(\frac{|\beta_{00}\rangle+|\beta_{10}\rangle}{\sqrt{2}}\right)\frac{\alpha|0\rangle}{\sqrt{2}}+\left(\frac{|\beta_{01}\rangle+|\beta_{11}\rangle}{\sqrt{2}}\right)\frac{\alpha|1\rangle}{\sqrt{2}}+\left(\frac{|\beta_{01}\rangle-|\beta_{11}\rangle}{\sqrt{2}}\right)\frac{\beta|0\rangle}{\sqrt{2}}+\left(\frac{|\beta_{00}\rangle-|\beta_{10}\rangle}{\sqrt{2}}\right)\frac{\beta|1\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{2}(|\beta_{00}\rangle+|\beta_{10}\rangle)\alpha|0\rangle+\frac{1}{2}(|\beta_{01}\rangle+|\beta_{11}\rangle)\alpha|1\rangle+\frac{1}{2}(|\beta_{01}\rangle-|\beta_{11}\rangle)\beta|0\rangle+\frac{1}{2}(|\beta_{00}\rangle-|\beta_{10}\rangle)\beta|1\rangle$$

$$=\frac{1}{2}(|\beta_{00}\rangle\alpha|0\rangle+|\beta_{10}\rangle\alpha|0\rangle)+\frac{1}{2}(|\beta_{01}\rangle\alpha|1\rangle+|\beta_{11}\rangle\alpha|1\rangle)+\frac{1}{2}(|\beta_{01}\rangle\beta|0\rangle-|\beta_{11}\rangle\beta|0\rangle)+\frac{1}{2}(|\beta_{00}\rangle\beta|1\rangle-|\beta_{10}\rangle\beta|1\rangle)$$

# ベル基底による式の展開(2)

$$=\frac{1}{2}\left(|\beta_{00}\rangle\alpha|0\rangle+|\beta_{10}\rangle\alpha|0\rangle\right)+\frac{1}{2}\left(|\beta_{01}\rangle\alpha|1\rangle+|\beta_{11}\rangle\alpha|1\rangle\right)+\frac{1}{2}\left(|\beta_{01}\rangle\beta|0\rangle-|\beta_{11}\rangle\beta|0\rangle\right)+\frac{1}{2}\left(|\beta_{00}\rangle\beta|1\rangle-|\beta_{10}\rangle\beta|1\rangle\right)$$

$$=\frac{1}{2}|\beta_{00}\rangle\left(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle\right)+\frac{1}{2}|\beta_{01}\rangle\left(\alpha|1\rangle+\beta|0\rangle\right)+\frac{1}{2}|\beta_{10}\rangle\left(\alpha|0\rangle-\beta|1\rangle\right)+\frac{1}{2}|\beta_{11}\rangle\left(\alpha|1\rangle-\beta|0\rangle\right)$$

$$=\frac{1}{2}|\beta_{00}\rangle\left(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle\right)+\frac{1}{2}|\beta_{01}\rangle X\left(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle\right)+\frac{1}{2}|\beta_{10}\rangle Z\left(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle\right)+\frac{1}{2}|\beta_{11}\rangle XZ\left(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle\right)$$

$$|\psi\rangle_V|\beta_{00}\rangle_{AB}=\frac{1}{2}|\beta_{00}\rangle_{VA}|\psi\rangle_B+\frac{1}{2}|\beta_{01}\rangle_{VA}X|\psi\rangle_B+\frac{1}{2}|\beta_{10}\rangle_{VA}Z|\psi\rangle_B+\frac{1}{2}|\beta_{11}\rangle_{VA}XZ|\psi\rangle_B$$

$$\boxed{|\psi\rangle_V|\beta_{00}\rangle_{AB}=\sum_{x,y}\frac{1}{2}|\beta_{xy}\rangle_{VA}X^yZ^x|\psi\rangle_B}$$

ベル基底による式の展開完了。

# ベル基底状態の準備及び展開

①初期状態

$$|\psi\rangle_V |00\rangle_{AB} = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes |00\rangle$$
$$= \alpha|000\rangle + \beta|100\rangle$$

②2項目（A側）にアダマール変換をする。

$$= \alpha|0\rangle\left(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)|0\rangle + \beta|1\rangle\left(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)|0\rangle$$
$$= \left(\frac{\alpha|0\rangle|0\rangle|0\rangle + \alpha|0\rangle|1\rangle|0\rangle}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{\beta|1\rangle|0\rangle|0\rangle + \beta|1\rangle|1\rangle|0\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$
$$= \left(\frac{\alpha|000\rangle + \alpha|010\rangle}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{\beta|100\rangle + \beta|110\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

③2項目3項目（B側）にCNOT変換をする。

$$= \left(\frac{\alpha|000\rangle + \alpha|011\rangle}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{\beta|100\rangle + \beta|111\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

④状態準備完了

$$\frac{\alpha|000\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{\alpha|011\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{\beta|100\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{\beta|111\rangle}{\sqrt{2}} = |\psi\rangle_V |\beta_{00}\rangle_{AB}$$

※ 証明は補足にて

⑤1項目2項目にCNOT変換をする。

$$\frac{\alpha|000\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{\alpha|011\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{\beta|110\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{\beta|101\rangle}{\sqrt{2}}$$

⑤⑥でベル基底から元の $|xy\rangle$ 基底に変換する

⑥1項目にアダマール変換をする。

$$\alpha\left(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\frac{|00\rangle}{\sqrt{2}} + \alpha\left(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\frac{|11\rangle}{\sqrt{2}} + \beta\left(\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\frac{|10\rangle}{\sqrt{2}} + \beta\left(\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\frac{|01\rangle}{\sqrt{2}}$$
$$\alpha\left(\frac{|000\rangle+|100\rangle}{2}\right) + \alpha\left(\frac{|011\rangle+|111\rangle}{2}\right) + \beta\left(\frac{|010\rangle-|110\rangle}{2}\right) + \beta\left(\frac{|001\rangle-|101\rangle}{2}\right)$$
$$\left(\frac{\alpha|000\rangle+\alpha|100\rangle}{2}\right) + \left(\frac{\alpha|011\rangle+\alpha|111\rangle}{2}\right) + \left(\frac{\beta|010\rangle-\beta|110\rangle}{2}\right) + \left(\frac{\beta|001\rangle-\beta|101\rangle}{2}\right)$$
$$|00\rangle\left(\frac{\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle}{2}\right) + |01\rangle\left(\frac{\alpha|1\rangle+\beta|0\rangle}{2}\right) + |10\rangle\left(\frac{\alpha|0\rangle-\beta|1\rangle}{2}\right) + |11\rangle\left(\frac{\alpha|1\rangle-\beta|0\rangle}{2}\right)$$

# 基底変換後の量子テレポーテーションの完了

$$\frac{1}{2}|00\rangle(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)+\frac{1}{2}|01\rangle(\alpha|1\rangle+\beta|0\rangle)+\frac{1}{2}|10\rangle(\alpha|0\rangle-\beta|1\rangle)+\frac{1}{2}|11\rangle(\alpha|1\rangle-\beta|0\rangle)$$

$$\frac{1}{2}|00\rangle(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)+\frac{1}{2}|01\rangle X(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)+\frac{1}{2}|10\rangle Z(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)+\frac{1}{2}|11\rangle XZ(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)$$

$$\frac{1}{2}|00\rangle|\psi\rangle_B+\frac{1}{2}|01\rangle X|\psi\rangle_B+\frac{1}{2}|10\rangle Z|\psi\rangle_B+\frac{1}{2}|11\rangle XZ|\psi\rangle_B \Rightarrow \sum_{x,y}\frac{1}{2}|xy\rangle X^y Z^x|\psi\rangle_B$$

ベル状態からの基底変換

Victorの量子状態がBobの量子状態に完全転送される。

たとえば、Aliceが01と測定したことを古典的方法でBobに連絡し操作Xを加えると、Victorの量子状態がBobに完全転送さたことになる。

Aliceから送られてきた古典情報を使って、基底変換して表わされる重なり合った4種類の波動関数の中から、Bobは波動関数を選び出したに過ぎない。

- .ベル基底変換で状態準備
- .Aliceによるベル測定（ベル基底による測定）
  更に基底変換した後でもよい。
- .古典的連絡手段によりベル測定結果の伝達
  $x, y$ の値を伝達する。
- .Bobによる状態の復元
  Aliceからの情報に従いゲート操作を行う。

# 行列の縦ベクトル(補足)

次の4行4列の行列の1列目の縦ベクトルの成分を取り出すときには、下記の通り1行目が1で他は0の縦ベクトルとの積をとれば取り出せる。

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 9 & 6 \\ 1 & 5 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & 9 & 6 \\ 1 & 5 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

同様に2列目以降も、2行目のみが1の縦ベクトルとの積で取り出せて、n列目の縦ベクトルを取り出す場合n行目のみが1で他は0の縦ベクトルとの積を取ればいいことがわかる。

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 9 & 6 \\ 1 & 5 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 9 & 6 \\ 1 & 5 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 9 & 6 \\ 1 & 5 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

n行n列の正方行列のk列の縦成分を取り出した縦ベクトルは、k行目のみ1で他は0となる縦行列Bの成分は $b_j = \delta_{jk}$ となり

$$c_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \delta_{jk} = a_{ik}$$

で確かに行列Aのk列の成分となることが示される。

# ユニタリー行列(補足)

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

また、正方行列Aのk列とs列との内積が次の関係にある時

$$\delta_{ks}=\sum_{i=1}^{n} a_{ik}{}^{*} a_{is}$$

の関係を満たす行列はユニタリー行列になる。

行列Aの転置共役な行列A*ᵗ　をとると

$$a_{ki}{}^{t*}=a_{ik}{}^{*}$$ なので

$$\delta_{ks}=\sum_{i=1}^{n} a_{ki}{}^{t*} a_{is}$$

$$\therefore \quad A^{t*}A=I$$

となり行列Aと行列Aと転置共役な行列との積が単位行列となり行列Aがユニタリー行列であることを示している。

$$\vec{f}_k=\begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ a_{3k} \\ a_{4k} \end{bmatrix} \quad \vec{f}_s=\begin{bmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ a_{3s} \\ a_{4s} \end{bmatrix} \quad \vec{f}_k\cdot\vec{f}_s=\delta_{ks}$$

$$A=\left(\vec{f}_1,\vec{f}_2,\cdot,\cdot,\vec{f}_n\right)$$

# ベル状態の生成（補足１）

$$|\psi\rangle_V|00\rangle_{AB}=(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)\otimes|00\rangle \xrightarrow{} \frac{\alpha|000\rangle}{\sqrt{2}}+\frac{\alpha|011\rangle}{\sqrt{2}}+\frac{\beta|100\rangle}{\sqrt{2}}+\frac{\beta|111\rangle}{\sqrt{2}}$$

Hadamard-gates
Controlled-Not

$$\left(\frac{\alpha|000\rangle}{\sqrt{2}}+\frac{\beta|100\rangle}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{\alpha|011\rangle}{\sqrt{2}}+\frac{\beta|111\rangle}{\sqrt{2}}\right)=(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)\frac{|00\rangle}{\sqrt{2}}+(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)\frac{|11\rangle}{\sqrt{2}}=(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)\left(\frac{|00\rangle+|11\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=|\psi\rangle_V|\beta_{00}\rangle_{AB}$$

$$\therefore\quad |\psi\rangle_V|\beta_{00}\rangle_{AB}=\frac{\alpha|000\rangle}{\sqrt{2}}+\frac{\alpha|011\rangle}{\sqrt{2}}+\frac{\beta|100\rangle}{\sqrt{2}}+\frac{\beta|111\rangle}{\sqrt{2}}$$

ベル基底による式の展開

Controlled-Not
Hadamard-gates

$$\sum_{x,y}\frac{1}{2}|xy\rangle X^yZ^x|\psi\rangle_B$$

Hadamard-gates
Controlled-Not

$$|\psi\rangle_V|\beta_{00}\rangle_{AB}=\sum_{x,y}\frac{1}{2}|\beta_{xy}\rangle_{VA}X^yZ^x|\psi\rangle_B$$

# ベル状態の生成（補足２）

$$\frac{1}{2}|00\rangle|\psi\rangle_B+\frac{1}{2}|01\rangle X|\psi\rangle_B+\frac{1}{2}|10\rangle Z|\psi\rangle_B+\frac{1}{2}|11\rangle XZ|\psi\rangle_B$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}H|0\rangle|0\rangle|\psi\rangle_B+\frac{1}{2}H|0\rangle|1\rangle X|\psi\rangle_B+\frac{1}{2}H|1\rangle|0\rangle Z|\psi\rangle_B+\frac{1}{2}H|1\rangle|1\rangle XZ|\psi\rangle_B$$

**Hadamard-gates**

$$\frac{1}{2}\left(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)|0\rangle|\psi\rangle_B+\frac{1}{2}\left(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)|1\rangle X|\psi\rangle_B+\frac{1}{2}\left(\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)|0\rangle Z|\psi\rangle_B+\frac{1}{2}\left(\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)|1\rangle XZ|\psi\rangle_B$$

$$H|0\rangle=\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}\quad H|1\rangle=\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{|0\rangle|0\rangle+|1\rangle|0\rangle}{\sqrt{2}}\right)|\psi\rangle_B+\frac{1}{2}\left(\frac{|0\rangle|1\rangle+|1\rangle|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)X|\psi\rangle_B+\frac{1}{2}\left(\frac{|0\rangle|0\rangle-|1\rangle|0\rangle}{\sqrt{2}}\right)Z|\psi\rangle_B+\frac{1}{2}\left(\frac{|0\rangle|1\rangle-|1\rangle|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)XZ|\psi\rangle_B$$

**Controlled-Not**

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{|0\rangle|0\rangle+|1\rangle|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)|\psi\rangle_B+\frac{1}{2}\left(\frac{|0\rangle|1\rangle+|1\rangle|0\rangle}{\sqrt{2}}\right)X|\psi\rangle_B+\frac{1}{2}\left(\frac{|0\rangle|0\rangle-|1\rangle|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)Z|\psi\rangle_B+\frac{1}{2}\left(\frac{|0\rangle|1\rangle-|1\rangle|0\rangle}{\sqrt{2}}\right)XZ|\psi\rangle_B$$

$$\frac{1}{2}|\beta_{00}\rangle_{VA}|\psi\rangle_B+\frac{1}{2}|\beta_{01}\rangle_{VA}X|\psi\rangle_B+\frac{1}{2}|\beta_{10}\rangle_{VA}Z|\psi\rangle_B+\frac{1}{2}|\beta_{11}\rangle_{VA}XZ|\psi\rangle_B=\sum_{x,y}\frac{1}{2}|\beta_{xy}\rangle_{VA}X^yZ^x|\psi\rangle_B$$