神の数式への道のり（１）

Maxwell方程式のテンソル表示とラグラジアン

鹿児島現代物理勉強会

御領　悟志

2024.2.21

まずはじめに

テンソル表示

- 物理法則をあらゆる座標系で統一的に表現しようとしたときに、慣れ親しんでいるベクトル表記よりもテンソル表記の方が一般性を持つ。
- 物理法則をベクトルから、テンソル表記に修正することがまず第一歩となる。

ラグラジアン

- いろんな座標系での運動を取り扱う場合、解析力学の手法を用いると便利である。
- 統一的に物理法則を導く場合、解析力学のラグラジアンを用いると、とても見通しよく扱うことが出来る。

ラグラジアンとは

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(q_i, \dot{q}_i) dt$$

Lをある経路についてtで積分したSを、最小とする経路$(q_i, \dot{q}_i)$を求めたい。Sを最小とする経路$(q_i, \dot{q}_i)$の満たすべき条件は、Lの積分値を最小とする最小作用の原理より、Lについてのオイラー・ラグランジュ方程式を書き下すことで導かれる。

物体の運動についての物理法則が、Lの積分の最小作用の原理から導かれとき、Lを物理法則についての**ラグラジアン**という。

物理では、このラグラジアンを見つけることが最重要目標となる。

最小作用の原理について

Lをtについて積分した値をSとする。

$$S=\int_{t_0}^{t_1} L(q_i,\dot{q}_i)dt$$

$$\delta S=\int_{t_0}^{t_1} \delta L(q_i,\dot{q}_i)dt$$

$$\delta L=\sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i \cdots ①$$

$$\delta S=\int_{t_0}^{t_1}\sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i\right)dt$$

$\delta \dot{q}_i=\frac{d}{dt}(\delta q_i)$　より

$$\delta S=\int_{t_0}^{t_1}\sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}(\delta q_i)\right)dt\cdots ②$$

$$\delta S=\sum_i\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right]_{t_0}^{t_1}+\int_{t_0}^{t_1}\sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right]\delta q_i\right)dt\cdots ③$$

$\delta q_i(t_0)=\delta q_i(t_1)=0$　なので

$$\delta S=\int_{t_0}^{t_1}\sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right]\right)\delta q_i dt=0 \quad ならば \quad \cdots ④$$

任意のδq_iにおいて最小が成り立つので

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right]\right)=0\cdots ⑤$$

オイラー・ラグランジュ方程式

電磁場を表す式・その1

$A^\mu = \begin{bmatrix}\phi & A_x & A_y & A_z\end{bmatrix}$ を用いると、電場は次式になる。

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \qquad F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \quad F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 0 - (E_x)^2 - (E_y)^2 - (E_z)^2 \quad -(E_x)^2 + 0 + (B_z)^2 + (B_y)^2$$

$$-(E_y)^2 + (B_z)^2 + 0 + (B_x)^2 \quad -(E_z)^2 + (B_y)^2 + (B_x)^2 + 0$$

$$= 2\left[(B_x)^2 + (B_y)^2 + (B_z)^2\right] - 2\left[(E_x)^2 + (E_y)^2 + (E_y)^2\right]$$

$$\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{4}\left\{2\left[(B_x)^2 + (B_y)^2 + (B_z)^2\right] - 2\left[(E_x)^2 + (E_y)^2 + (E_z)^2\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left[(B_x)^2 + (B_y)^2 + (B_z)^2\right] - \left[(E_x)^2 + (E_y)^2 + (E_z)^2\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\vec{B}\right)^2 - \left(\vec{E}\right)^2\right\}$$

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left\{\left(\vec{E}\right)^2 - \left(\vec{B}\right)^2\right\} \Rightarrow$$ 光子のラグランジアン

マックスウェル方程式のテンソル表示（１）

ベクトル表示

$$div\ \vec{D} = \rho \qquad rot\ \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j}$$

$$div\vec{B} = 0 \qquad rot\ \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

テンソル表示

$$\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = j^{\nu}$$

$$\partial^{\mu} F^{\nu\lambda} + \partial^{\lambda} F^{\mu\nu} + \partial^{\nu} F^{\lambda\mu} = 0$$

ϕ ポテンシャル　　$\vec{A}$ ベクトルポテンシャル

$$\vec{E} = -\nabla\ \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^{\nu}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\nu}} = \partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu}$$

$$J^{\mu} = \left(\rho, J^{i}\right) = \left(\rho, \mathbf{J}\right)$$

$$A^{\mu} = \left(A^{0}, A^{i}\right) = \left(\phi, \mathbf{A}\right)$$

マックスウェル方程式のラグラジアン計算詳細（１）

$$F^{\mu\nu}=\frac{\partial A^{\nu}}{\partial x_{\mu}}-\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\nu}}=\partial^{\mu}A^{\nu}-\partial^{\nu}A^{\mu}$$

$$F^{\nu\mu}=\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\nu}}-\frac{\partial A^{\nu}}{\partial x_{\mu}}=\partial^{\nu}A^{\mu}-\partial^{\mu}A^{\nu}$$

$$F^{\nu\mu}+F^{\mu\nu}=0$$

$$F^{\nu\mu}=-F^{\mu\nu}\quad\cdots①$$

$$F_{\mu\nu}=\frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}}=\partial_{\mu}A_{\nu}-\partial_{\nu}A_{\mu}$$

$$F_{\nu\mu}=\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}}=\partial_{\nu}A_{\mu}-\partial_{\mu}A_{\nu}$$

$$F_{\mu\nu}+F_{\nu\mu}=0$$

$$F_{\mu\nu}=-F_{\nu\mu}\quad\cdots②$$

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-A_{\mu}j^{\mu}\quad\cdots③$$

②③から<u>μとνを入れ替えてもラグラジアンの各項の値は変化しない</u>

$$-\frac{1}{4}F_{\nu\mu}F^{\nu\mu}=-\frac{1}{4}\left(-F_{\mu\nu}\right)\left(-F^{\mu\nu}\right)=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\quad\cdots④$$

④からラグラジアンの各項の和を表すと

$$\mathcal{L}=\begin{array}{l}
-\frac{1}{4}F_{00}F^{00}\quad-\frac{1}{4}F_{10}F^{10}-\frac{1}{4}F_{01}F^{01}-\frac{1}{4}F_{12}F^{12}-\frac{1}{4}F_{21}F^{21}\\
-\frac{1}{4}F_{11}F^{11}\quad-\frac{1}{4}F_{20}F^{20}-\frac{1}{4}F_{02}F^{02}-\frac{1}{4}F_{13}F^{13}-\frac{1}{4}F_{31}F^{31}\\
-\frac{1}{4}F_{22}F^{22}\quad-\frac{1}{4}F_{30}F^{30}-\frac{1}{4}F_{03}F^{03}-\frac{1}{4}F_{23}F^{23}-\frac{1}{4}F_{32}F^{32}\\
-\frac{1}{4}F_{33}F^{33}\quad-A_{0}j^{0}-A_{1}j^{1}-A_{2}j^{2}-A_{3}j^{3}
\end{array}\quad\cdots⑤$$

マックスウェル方程式のラグラジアン計算詳細(２)

ラグラジアンの各項の和

$$-\frac{1}{4}F_{00}F^{00}=0 \quad -\frac{1}{4}F_{10}F^{10}-\frac{1}{4}F_{01}F^{01}=-\frac{1}{2}F_{10}F^{10}=-\frac{1}{2}\left(\partial_1 A_0-\partial_0 A_1\right)\left(\partial^1 A^0-\partial^0 A^1\right)=\frac{1}{2}\left(\partial_1 A_0-\partial_0 A_1\right)^2$$

$$-\frac{1}{4}F_{11}F^{11}=0 \quad -\frac{1}{4}F_{20}F^{20}-\frac{1}{4}F_{02}F^{02}=-\frac{1}{2}F_{20}F^{20}=-\frac{1}{2}\left(\partial_2 A_0-\partial_0 A_2\right)\left(\partial^2 A^0-\partial^0 A^2\right)=\frac{1}{2}\left(\partial_2 A_0-\partial_0 A_2\right)^2$$

$$-\frac{1}{4}F_{22}F^{22}=0 \quad -\frac{1}{4}F_{30}F^{30}-\frac{1}{4}F_{03}F^{03}=-\frac{1}{2}F_{30}F^{30}=-\frac{1}{2}\left(\partial_3 A_0-\partial_0 A_3\right)\left(\partial^3 A^0-\partial^0 A^3\right)=\frac{1}{2}\left(\partial_3 A_0-\partial_0 A_3\right)^2$$

$$-\frac{1}{4}F_{33}F^{33}=0 \quad -\frac{1}{4}F_{12}F^{12}-\frac{1}{4}F_{21}F^{21}=-\frac{1}{2}F_{12}F^{12}=-\frac{1}{2}\left(\partial_1 A_2-\partial_2 A_1\right)\left(\partial^1 A^2-\partial^2 A^1\right)=-\frac{1}{2}\left(\partial_1 A_2-\partial_2 A_1\right)^2 \quad \cdots ⑥$$

$$-\frac{1}{4}F_{13}F^{13}-\frac{1}{4}F_{31}F^{31}=-\frac{1}{2}F_{13}F^{13}=-\frac{1}{2}\left(\partial_1 A_3-\partial_3 A_1\right)\left(\partial^1 A^3-\partial^3 A^1\right)=-\frac{1}{2}\left(\partial_1 A_3-\partial_3 A_1\right)^2$$

$$-\frac{1}{4}F_{23}F^{23}-\frac{1}{4}F_{32}F^{32}=-\frac{1}{2}F_{23}F^{23}=-\frac{1}{2}\left(\partial_2 A_3-\partial_3 A_2\right)\left(\partial^2 A^3-\partial^3 A^2\right)=-\frac{1}{2}\left(\partial_2 A_3-\partial_3 A_2\right)^2$$

$$-A_0 j^0-A_1 j^1-A_2 j^2-A_3 j^3$$

マックスウェル方程式のラグランジアン計算詳細（３）

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - A_\mu j^\mu$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_1 A_0 - \partial_0 A_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_2 A_0 - \partial_0 A_2)^2 + \frac{1}{2}(\partial_3 A_0 - \partial_0 A_3)^2$$

$$-\frac{1}{2}(\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1)^2 - \frac{1}{2}(\partial_1 A_3 - \partial_3 A_1)^2 - \frac{1}{2}(\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2)^2 - A_0 j^0 - A_1 j^1 - A_2 j^2 - A_3 j^3 \quad \cdots ⑦$$

$$-\frac{1}{4}F_{00}F^{00} = 0 \quad -\frac{1}{4}F_{11}F^{11} = 0 \quad -\frac{1}{4}F_{22}F^{22} = 0 \quad -\frac{1}{4}F_{33}F^{33} = 0$$

マックスウェル方程式のラグラジアン計算詳細(4)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} = \frac{\partial}{\partial(\partial_\nu A_\mu)}\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - A_\mu j^\mu\right) \quad \cdots ⑧$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_1)} = -\left(\partial_1 A_0 - \partial_0 A_1\right) = \left(\partial^1 A^0 - \partial^0 A^1\right) = F^{10}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_1 A_1)} = \frac{1}{2}\left(\partial_1 A_1 - \partial_1 A_1\right) = \frac{1}{2}\left(\partial^1 A^1 - \partial^1 A^1\right) = F^{11} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_2 A_1)} = \left(\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1\right) = \left(\partial^1 A^2 - \partial^2 A^1\right) = F^{12}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_3 A_1)} = \left(\partial_1 A_3 - \partial_3 A_1\right) = \left(\partial^1 A^3 - \partial^3 A^1\right) = F^{13}$$

$$\partial_0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_1)} = \partial_0 F^{10} \quad \partial_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_1 A_1)} = \partial_1 F^{11} \quad \partial_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_2 A_1)} = \partial_2 F^{12} \quad \partial_3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_3 A_1)} = \partial_3 F^{13} \quad \cdots ⑨$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = \frac{\partial}{\partial A_\mu}\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - A_\mu j^\mu\right) = -j^\mu$$

$$\partial_0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_1)} + \partial_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_1 A_1)} + \partial_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_2 A_1)} + \partial_3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_3 A_1)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_1} = \partial_0 F^{10} + \partial_1 F^{11} + \partial_2 F^{12} + \partial_3 F^{13} + j^1 = -\partial_0 F^{01} - \partial_1 F^{11} - \partial_2 F^{21} - \partial_3 F^{31} + j^1 = 0 \quad \cdots ⑩$$

$\partial_0 F^{01} + \partial_1 F^{11} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} = j^1$ 一般的に表示すると $\partial_0 F^{0\mu} + \partial_1 F^{1\mu} + \partial_2 F^{2\mu} + \partial_3 F^{3\mu} = j^\mu$ $\cdots$⑪ ⇨ $\partial_\nu F^{\nu\mu} = j^\mu$

$$-\frac{1}{4}F_{00}F^{00} = 0$$
$$-\frac{1}{4}F_{11}F^{11} = 0$$
$$-\frac{1}{4}F_{22}F^{22} = 0$$
$$-\frac{1}{4}F_{33}F^{33} = 0$$

$$-\frac{1}{4}F_{10}F^{10} - \frac{1}{4}F_{01}F^{01} = \frac{1}{2}\left(\partial_1 A_0 - \partial_0 A_1\right)^2$$
$$-\frac{1}{4}F_{20}F^{20} - \frac{1}{4}F_{02}F^{02} = \frac{1}{2}\left(\partial_2 A_0 - \partial_0 A_2\right)^2$$
$$-\frac{1}{4}F_{30}F^{30} - \frac{1}{4}F_{03}F^{03} = \frac{1}{2}\left(\partial_3 A_0 - \partial_0 A_3\right)^2$$
$$-\frac{1}{4}F_{12}F^{12} - \frac{1}{4}F_{21}F^{21} = -\frac{1}{2}\left(\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1\right)^2$$
$$-\frac{1}{4}F_{13}F^{13} - \frac{1}{4}F_{31}F^{31} = -\frac{1}{2}\left(\partial_1 A_3 - \partial_3 A_1\right)^2$$
$$-\frac{1}{4}F_{23}F^{23} - \frac{1}{4}F_{32}F^{32} = -\frac{1}{2}\left(\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2\right)^2$$
$$-A_0 j^0 - A_1 j^1 - A_2 j^2 - A_3 j^3$$

ラグラジアンの各項

マックスウェル方程式のラグラジアン(1)

マックスウェル方程式のテンソル表示

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad \cdots ①$$

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad \cdots ②$$

②を①に代入すると

$$\partial_\mu \left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \right) = j^\nu$$

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = j^\nu$$

$$\Box\, A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = j^\nu \quad \cdots ③$$

$$J^\mu = \left(\rho \quad J^i \right) = \left(\rho, \mathbf{J} \right) \quad A^\mu = \left(A^0 \quad A^i \right) = \left(\phi, \mathbf{A} \right) \quad \cdots ④$$

マックスウェル方程式のラグラジアンは次の通りになる

$$\mathfrak{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - A_\mu j^\mu \quad \cdots ⑤$$

$$= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - A_0 j^0 - A_1 j^1 - A_2 j^2 - A_3 j^3$$

$$= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - A_0 j^0 + A^1 j^1 + A^2 j^2 + A^3 j^3$$

$$= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \rho A_0 + \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} \quad \cdots ⑥$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\vec{E} \right)^2 - \left(\vec{B} \right)^2 \right] - \rho A_0 + \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} \quad \cdots ⑦$$

⑤が、マクスウェル方程式のグラジアンであることを確認する。

マックスウェル方程式のラグラジアン（2）

（□）$\mu = 1,2,3 \quad \nu = 1,2,3$　のときについて確認する

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - A_\mu j^\mu$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right)\left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right) - A_\mu j^\mu$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = -j^\mu \quad \cdots ⑦$$

$$\partial_\mu = -\partial^\mu \quad A_\nu = -A^\nu \quad \partial_\mu A_\nu = -\partial_\mu A^\nu \quad \partial_\mu A_\nu = \partial^\mu A^\nu$$

$$-\frac{1}{4}\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right)\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right)$$

$$-\frac{1}{4}\left(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu\right)\left(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\left\{\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right)^2 + \left(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu\right)^2\right\}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\nu A_\mu\right)} = -\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial_\nu A_\mu}\left\{\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right)^2 + \left(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu\right)^2\right\}$$

$$= -\frac{1}{4}\left\{-2\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right) + 2\left(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu\right)\right\}$$

$$= -\frac{1}{4}\left\{4\left(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu\right)\right\}$$

$$= -\left(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu\right) = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = F^{\mu\nu} \cdots ⑧$$

$$\partial_\nu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\nu A_\mu\right)}\right) = \partial_\nu F^{\mu\nu} \cdots ⑨$$

マックスウェル方程式のラグラジアン(3)

(□) $\mu = 1,2,3 \quad \nu = 0$ 　のときについて　　　$\partial_0 = \partial^0 \quad A_\mu = -A^\mu \quad \partial_\mu A_0 = \partial_\mu A^0 \quad \partial_\mu A_0 = -\partial^\mu A^0$

$\mu = 0 \qquad \nu = 1,2,3$

$$-\frac{1}{4}\left(\partial_\mu A_0 - \partial_0 A_\mu\right)\left(\partial^\mu A^0 - \partial^0 A^\mu\right) - \frac{1}{4}\left(\partial_0 A_\mu - \partial_\mu A_0\right)\left(\partial^0 A^\mu - \partial^\mu A^0\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\partial_\mu A_0 - \partial_0 A_\mu\right)\left(\partial_\mu A_0 - \partial_0 A_\mu\right) + \frac{1}{4}\left(-\partial_0 A_\mu + \partial_\mu A_0\right)\left(-\partial_0 A_\mu + \partial_\mu A_0\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\partial_\mu A_0 - \partial_0 A_\mu\right)^2$$

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial\left(\partial_0 A_\mu\right)} = -\left(\partial_\mu A_0 - \partial_0 A_\mu\right) = \left(\partial^\mu A^0 - \partial^0 A^\mu\right) = F^{\mu 0}$$

$\partial_0\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial\left(\partial_0 A_\mu\right)}\right) = \partial_0 F^{\mu 0}$ (□)と(□)を合わせると　$\mu = 1,2,3 \ \nu = 0,1,2,3$ 　のときについて $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial A_\mu} = -j^\mu$ より

$$\partial_\nu\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial\left(\partial_\nu A_\mu\right)}\right) - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial A_\mu} = \partial_\nu F^{\mu\nu} + j^\mu = 0 \qquad \partial_\nu F^{\mu\nu} = -j^\mu \qquad -\partial_\nu F^{\nu\mu} = -j^\mu \qquad \partial_\nu F^{\nu\mu} = j^\mu \quad \cdots ⑪$$

マックスウェル方程式のラグラジアン（4）

（□） $\mu = 0 \quad \nu = 0$ のときについて

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - A_\mu j^\mu$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\partial_0 A_0 - \partial_0 A_0\right)\left(\partial^0 A^0 - \partial^0 A^0\right) - A_0 j^0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0 A_0\right)} = 0 = F^{00} \qquad \partial_0\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0 A_0\right)}\right) = \partial_0 F^{00} \qquad \therefore \quad \mu = 0 \quad \nu = 0,1,2,3$$ のときについて

$$\partial_\nu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\nu A_0\right)}\right) = \partial_\nu F^{0\nu} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_0} = -j^0 \qquad \partial_\nu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\nu A_0\right)}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_0} = 0$$

$$\partial_\nu F^{0\nu} + j^0 = 0 \qquad -\partial_\nu F^{\nu 0} = -j^0 \qquad \partial_\nu F^{\nu 0} = j^0 \quad \cdots ⑫$$

（□）～（□）を総合すると $\mu = 0,1,2,3 \quad \nu = 0,1,2,3$ のときについて

$$\partial_\nu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\nu A_\mu\right)}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = \partial_\nu F^{\mu\nu} + j^\mu = 0 \qquad \partial_\nu F^{\mu\nu} = -j^\mu \quad -\partial_\nu F^{\nu\mu} = -j^\mu \quad \partial_\nu F^{\nu\mu} = j^\mu$$

マックスウェル方程式のラグラジアン（結論）

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - A_{\mu} j^{\mu}$$

オイラー・ラグランジ方程式に上記ラグラジアンを代入すると、テンソル形式のマックスウェル方程式が導けることが確認できた。

$$\partial_{\nu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_{\nu} A_{\mu}\right)}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_{\nu} F^{\nu\mu} = j^{\mu}$$

神の数式への道のり（２）
量子電磁力学（QED）まで

鹿児島現代物理勉強会
御領　悟志

2024.2.19

ディラック方程式のラグラジアン（１）

$$\mathfrak{L} = \overline{\psi}(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi \quad \cdots ①$$

$$\overline{\psi} = \psi^{\dagger}\gamma^{0}$$

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = \gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu} = 2g^{\mu\nu}$$

$$(\gamma^{0})^2 = 1 \quad (\gamma^{1})^2 = (\gamma^{2})^2 = (\gamma^{3})^2 = -1$$

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^{0}$$

$$\gamma^{1\dagger} = -\gamma^{1} \quad \gamma^{2\dagger} = -\gamma^{2} \quad \gamma^{3\dagger} = -\gamma^{3}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_{\mu}\psi)} = i\overline{\psi}\gamma^{\mu} \quad \partial_{\mu}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_{\mu}\psi)}\right) = \partial_{\mu}(i\overline{\psi}\gamma^{\mu})$$

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \psi} = -m\overline{\psi} \quad \partial_{\mu}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_{\mu}\psi)}\right) - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \psi} = 0$$ なので

$$\partial_{\mu}(i\overline{\psi}\gamma^{\mu}) + m\overline{\psi} = 0 \quad \cdots ②$$

$$i\partial_{\mu}\psi^{\dagger}\gamma^{0}\gamma^{\mu} + m\psi^{\dagger}\gamma^{0} = 0$$

$$i\partial_{\mu}\psi^{\dagger}\gamma^{0}\gamma^{\mu}\gamma^{0} + m\psi^{\dagger}\gamma^{0}\gamma^{0} = 0$$

$$-i\partial_{\mu}\psi^{\dagger}\gamma^{0}\gamma^{0}\gamma^{\mu} + m\psi^{\dagger} = 0$$

$$-i\partial_{\mu}\psi^{\dagger}\gamma^{\mu} + m\psi^{\dagger} = 0$$ **複素共役をとると**

$$i\gamma^{\dagger\mu}\partial_{\mu}\psi + m\psi = 0 \quad -i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi + m\psi = 0$$

$$i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\psi = 0 \quad \cdots ③$$

$$\therefore \ (i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi = 0$$

ディラック方程式のラグラジアン（２）

$$\partial_\mu \Rightarrow D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu \quad \cdots ③ \qquad \theta(x_\nu) = q\chi(x_\nu)$$ とすると、ゲージ場は

$$A_\mu \Rightarrow A_\mu - \frac{1}{q}\partial_\mu q\chi(x^\nu) = A_\mu - \partial_\mu \chi(x^\nu)$$ と変換される。･･･④

ディラック方程式中に代入すると、

$$\mathfrak{L} = \overline{\psi}\left(i\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) - m\right)\psi = \overline{\psi}\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi - \left(q\overline{\psi}\gamma^\mu\psi\right)A_\mu \quad \cdots ⑤$$

荷電粒子のラグラジアン

マックスウェル方程式のラグラジアンは

$$\mathfrak{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - A_\mu j^\mu \quad \cdots ①$$

自由空間の場合　$J^\mu = 0$ なので

$$\mathfrak{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad \cdots ②$$

Dirac方程式に従う自由電子のラグラジアンは、
ゲージ対称性も考慮すると下記の通りになる。

$$\mathfrak{L} = \overline{\psi}\left(i\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) - m\right)\psi \quad \cdots ③$$

$$= \overline{\psi}\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi - \left(q\overline{\psi}\gamma^\mu\psi\right)A_\mu \quad \cdots ④$$

マックスウェル方程式のラグラジアンまで付け加えると次のようになる。

$$\mathfrak{L} = \overline{\psi}\left(i\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) - m\right)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

$$\mathfrak{L} = \overline{\psi}\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi - \left(q\overline{\psi}\gamma^\mu\psi\right)A_\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad \cdots ⑤$$

電磁量子力学（ＱＥＤ）のラグラジアン（１）

電磁気学を量子論的に扱う方程式

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi}\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\psi - \left(q\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi\right)A_{\mu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

第１項　自由電子を記述するディラック方程式

第２項　電子と光子の相互作用

第３項　電磁場のマックスウェル方程式

QEDは、U(１)ゲージ対称性をもつ可換ゲージ理論

電磁量子力学（ＱＥＤ）のラグラジアン（２）

$$\mathfrak{L}_{QED} = \bar{\psi}\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\psi - \left(q\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi\right)A_{\mu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

上式のオイラー・ラグランジュ方程式をつくると

$$\partial_{\nu}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}_{QED}}{\partial\left(\partial_{\nu}A_{\mu}\right)}\right) - \frac{\partial \mathfrak{L}_{QED}}{\partial A_{\mu}} = 0$$

$$\partial_{\nu}F^{\nu\mu} = j^{\mu} - q\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$$

電子の運動については

$q = -e$　なので

$$\partial_{\nu}F^{\nu\mu} = j^{\mu} + e\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$$

自由粒子については　$j^{\mu} = 0$

$$\partial_{\nu}F^{\nu\mu} = e\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$$

エネルギー・運動量テンソル（１）

$$x^\mu \to x^\mu + \delta a^\mu \quad \delta\phi = (\partial_\nu \phi)\delta a^\nu \quad \cdots①$$

$$\delta\mathfrak{L} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\delta(\partial_\mu \phi)$$

オイラー・ラグランジュ方程式より

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right) - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi} = 0$$

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right) = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi}$$

$$\delta\mathfrak{L} = \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right)\delta\phi + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\delta(\partial_\mu \phi)$$

$$\delta\mathfrak{L} = \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right)\delta\phi + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\partial_\mu(\delta\phi)$$

$$\delta\mathfrak{L} = \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\delta\phi\right) \quad \cdots②$$

$$\delta\mathfrak{L} = \partial_\mu\left[\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}(\partial_\nu \phi)\right]\delta a^\nu$$

$$\delta\mathfrak{L} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^\mu}\delta a^\mu = \delta^\mu_\nu \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^\mu}\delta a^\nu$$

$$\partial_\mu\left[\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}(\partial_\nu \phi)\right]\delta a^\nu - \delta^\mu_\nu \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^\mu}\delta a^\nu = 0$$

エネルギー・運動量テンソル(2)

$$\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}(\partial_\nu\phi)-\delta^\mu_\nu\mathcal{L}\right]\delta a^\nu=0 \quad \cdots③$$

δa^ν は任意なので

$$\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}(\partial_\nu\phi)-\delta^\mu_\nu\mathcal{L}\right]=0 \quad \cdots④$$

$$\mathrm{T}^\mu_\nu=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}(\partial_\nu\phi)-\delta^\mu_\nu\mathcal{L} \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu\mathrm{T}^\mu_\nu=0$$

$$\mathrm{T}^0_0=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)}(\partial_0\phi)-\mathcal{L} \quad \mathrm{T}^0_0=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}\dot{\phi}-\mathcal{L} \quad \cdots⑤$$

$$\Pi\left(\dot{\phi}\right)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} \quad \mathrm{H}=\Pi\dot{\phi}-\mathcal{L} \quad \cdots⑥$$

T^0_0 は場のエネルギー密度と考えられる

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{T}^0_0\right)+\nabla\cdot\mathbf{T_0}=0 \qquad \mathbf{T_0}=\left(\mathrm{T}^1_0,\mathrm{T}^2_0,\mathrm{T}^3_0\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\mathrm{T}^0_0\,\mathbf{d}^3\mathbf{x}=0 \quad \cdots⑦$$

系全体のエネルギー保存則を示す

量子色力学(QCDのラグランジアン)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a + \bar{q}\gamma^\mu \left(i\partial_\mu - g t^a A_\mu^a \right) q - m\bar{q}q$$

QEDのラグランジアンとの比較

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\left(i\gamma^\mu (\partial_\mu + iqA_\mu) - m \right)\psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

$$= \bar{\psi}\gamma^\mu (i\partial_\mu + iiqA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

$$= -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \bar{\psi}\gamma^\mu (i\partial_\mu - qA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi$$

解析力学の利点（私見）

- 座標の取り方に依存せず、同じ理論形式で運動を扱うことが出来る。
- このことが、量子力学の発展の礎にもなっている。
- 古典物理を、現代物理と同様の観点から考察が出来る。
- ミクロとマクロの間の不連続的な理論の飛躍の中で、数学的には同じ枠組みとしての連続性を持っている。