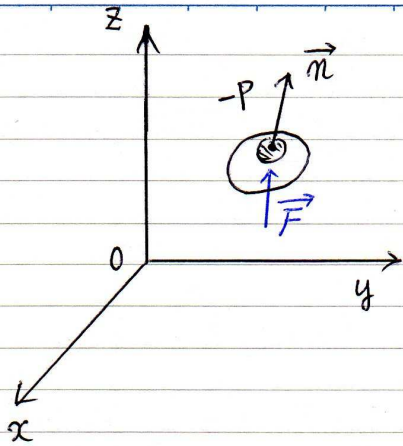




単位質量当りに外力 $\vec{F}$, 密度 $\rho [\text{kg}/\text{m}^3]$

$\vec{F} dv$

$$\int_V \rho \vec{F} \cdot d\vec{v} + \int_S (-P) \vec{n} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{--- ①}$$

$$\int_V \rho \vec{F} dv - \int_V \nabla P \cdot d\vec{v} = 0 \quad \text{--- ②}$$

$$\int \{ \rho \vec{F} - \nabla P \} dv = 0 \quad \text{--- ③}$$

$$\therefore \rho \vec{F} - \nabla P = 0$$

$$\rho \vec{F} = \nabla P \quad \text{--- ④}$$

$$dP = \nabla P \cdot d\vec{r} \text{ より}$$

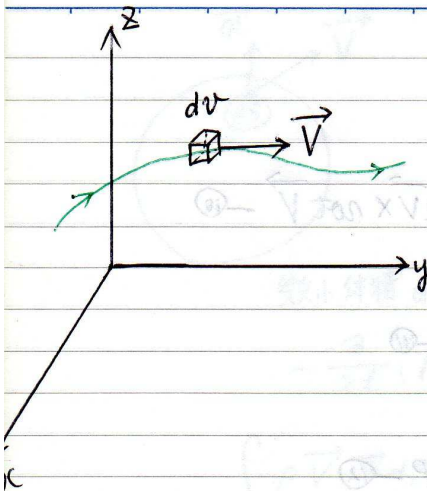
$$dP = \rho \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{--- ⑤}$$

外力がポテンシャルをもつとき

$$\vec{F} = -\nabla U \quad \text{--- ⑥}$$

$$dP = -\rho \nabla U \cdot d\vec{r} = -\rho dU \quad \text{--- ⑦}$$

(U は単位質量当りのポテンシャル)



流体とともに動く微小部分 dv

これに流体の同じ粒子を含み、かつ同じ質量

全質量 $\rho \cdot dv = m$

$$dv \text{ 部分の合力} = \int \rho \vec{F} dv - \int P \vec{n} \cdot d\vec{S} \quad (2)$$

$$= \int \rho \vec{F} dv - \int \nabla P \cdot dv$$

$$= \int (\rho \vec{F} - \nabla P) dv \quad (3)$$

運動方程式

$$\underbrace{\rho \cdot dv}_m \frac{d\vec{V}}{dt} = (\rho \vec{F} - \nabla P) dv \quad (4)$$

$$\therefore \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla P \quad (5)$$

流体の微小部分の速度 $\vec{V}(x, y, z, t)$

更に x, y, z は t の関数となる

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV_x}{dt} &= \frac{\partial V_x}{\partial t} + \frac{\partial V_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ \frac{dV_y}{dt} &= \frac{\partial V_y}{\partial t} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial V_y}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ \frac{dV_z}{dt} &= \frac{\partial V_z}{\partial t} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \frac{dz}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + V_x \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + V_y \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + V_z \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \quad (7)$$

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \quad (8)$$

⑧ ⑤ ④ ③ ② ①

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla P \quad \text{--- ⑧}$$

$$\nabla \vec{V}^2 = \nabla (\vec{V} \cdot \vec{V}) = 2(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} + 2\vec{V} \times \text{rot} \vec{V} \quad \text{--- ⑩}$$

$$2(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \nabla \vec{V}^2 - 2\vec{V} \times \text{rot} \vec{V}$$

$$(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \frac{1}{2} \nabla \vec{V}^2 - \vec{V} \times \text{rot} \vec{V} \quad \text{--- ⑪}$$

⑨ ⑤ ④ ③ ② ①

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \vec{V}^2 - \vec{V} \times \text{rot} \vec{V} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla P \quad \text{--- ⑨}$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - \vec{V} \times \text{rot} \vec{V} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla P - \frac{1}{2} \nabla \vec{V}^2 \quad \text{--- ⑬}$$

スカラー $\varphi(x, y, z, t)$

$P(x, y, z) \rightarrow Q(x+dx, y+dy, z+dz)$ に粒子の位置が変化し

$\varphi(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt)$ と変化したと仮定

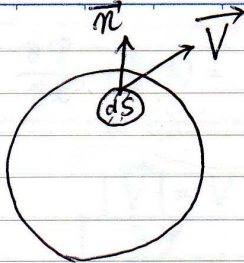
$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz + \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt \quad \text{--- ⑭}$$

$$= d\vec{r} \cdot \nabla \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt \quad \text{--- ⑮}$$

$$\therefore \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \nabla \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \varphi = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \right) \varphi \quad \text{--- ⑯}$$

ベクトルに適用

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \right) \vec{A} \quad \text{--- ⑰}$$



単位時間当りに

流出する流体の質量の総量は

$$\int_V \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dS \quad \text{--- ①}$$

微小体積 dv の質量の減少率 (dv は一定とる)

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot dv) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} dv \quad \text{--- ②}$$

$$\int_S \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dS = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv \quad \text{--- ③}$$

$$\int_V \operatorname{div}(\rho \vec{V}) dv = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv$$

$$\int_V \left\{ \operatorname{div}(\rho \vec{V}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right\} dv = 0 \quad \text{--- ④}$$

$$\therefore \operatorname{div}(\rho \vec{V}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{--- ⑤}$$

$$\operatorname{div}(\rho \vec{V}) = \vec{V} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \vec{V} = (\vec{V} \cdot \nabla) \rho + \rho \operatorname{div} \vec{V} \quad \text{--- ⑥}$$

$$\text{連続方程式は } \frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div} \vec{V} = 0 \quad \text{--- ⑦}$$

⑤ に ⑥ を代入すると

$$(\vec{V} \cdot \nabla) \rho + \rho \operatorname{div} \vec{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{--- ⑧}$$

$$\text{⑦ から } \rho = \text{一定} \text{ とすると } \operatorname{div} \vec{V} = 0 \quad \text{--- ⑨}$$

速度が時間に無関係なとき $\Rightarrow$ 速度は一定 $\Rightarrow$ 定常運動

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0 \quad \text{--- ⑩}$$

(ページ 3 ⑧)より

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla P \quad \text{--- ⑩}$$

[圧力方程式]

流体の密度 ρ は 圧力 P の関数

$$P = \int_{P_0}^P \frac{dP}{\rho(P)} \quad \text{と お こ と --- ⑪}$$

$$dP = \frac{dP}{\rho(P)} \quad \text{--- ⑫}$$

$$dP = \nabla P d\vec{r} = \frac{1}{\rho(P)} \nabla P d\vec{r} \quad \text{--- ⑬}$$

 $d\vec{r}$ は任意だから

$$\nabla P = \frac{1}{\rho(P)} \nabla P \quad \text{--- ⑭}$$

$$(P4 \text{ ③}) \text{ より } \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - \vec{V} \times \text{rot } \vec{V} = \vec{F} - \nabla P - \frac{1}{2} \nabla \vec{V}^2 \quad \text{--- ⑮}$$

外力がポテンシャルを持つとき

$$\vec{F} = -\nabla U \quad \text{と ⑮ へ 代入}$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - \vec{V} \times \text{rot } \vec{V} = -\nabla U - \nabla P - \frac{1}{2} \nabla \vec{V}^2$$

$$= -\nabla \left(U + P + \frac{1}{2} \vec{V}^2 \right) \quad \text{--- ⑯}$$

 $\vec{V}$ がポテンシャルをもつとき φ の速度

ポテンシャル

$$\vec{V} = -\nabla \varphi \quad \text{かつ} \quad \text{rot } \vec{V} = 0 \quad \text{だから}$$

⑯ へ 代入すると

$$\frac{\partial}{\partial t} (-\nabla \varphi) = -\nabla \left(U + P + \frac{1}{2} \vec{V}^2 \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \varphi) = \nabla \left(U + P + \frac{1}{2} \vec{V}^2 \right) \quad \text{--- ⑰}$$

$$\nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = \nabla \left(U + P + \frac{1}{2} \vec{V}^2 \right) \quad \text{--- ⑱}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(t) = U + P + \frac{1}{2} \vec{V}^2 \quad \text{--- ⑧}$$

圧力方程式

$$|\vec{V}| = V \text{ とおくと}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(t) = U + P + \frac{1}{2} V^2 \quad \text{--- ⑩}$$

圧力方程式

速度ポテンシャル φ とおくと

$$\vec{V} = -\nabla \varphi$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div} \vec{V} = \frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div}(-\nabla \varphi) = \frac{d\rho}{dt} - \nabla^2 \varphi \quad \text{--- ⑪}$$

とくに 定常状態をとる

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi = -\nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad \text{--- ⑫}$$

 $\therefore \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ は t だけの関数と考えられるので $F(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(t)$ とおける

$$\therefore \text{⑩より} \quad U + P + \frac{1}{2} V^2 = F(t) \quad \text{--- ⑬}$$

もしも ρ , あるいは P が t と無関係で、外力のポテンシャル U が x, y, z だけの関数の場合 $F(t)$ は定数となる。

$$\therefore U + P + \frac{1}{2} V^2 = C_1 \text{ (定数)} \quad \text{--- ⑭}$$

定常運動で速度ポテンシャルが存在しない時

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0 \text{ なら ⑥より (左ページ)}$$

$$+\vec{V} \times \operatorname{rot} \vec{V} = +\nabla \left(U + P + \frac{1}{2} V^2 \right) \quad \text{--- ⑮}$$

流体の粒子の変位を $d\vec{r}$ とおけば $d\vec{r} \parallel \vec{V}$ なので

$$d\vec{r} \cdot (\vec{V} \times \operatorname{rot} \vec{V}) = \nabla \left(U + P + \frac{1}{2} V^2 \right) \cdot d\vec{r} = 0$$

注意点

$$\therefore \frac{V^2}{2} + P + U = C_2 \text{ (一定)}$$

C_2 はひとつの流線についての定数

ベルヌーイの定理

密度 ρ が圧力 P に無関係のとき $\rightarrow$ 縮まない流体

液体ではほぼ $\rho = (\text{一定})$

$$\therefore P = \int_{P_0}^P \frac{dP}{\rho} = \frac{P}{\rho} + C \quad (C: \text{定数})$$

流体についてのベルヌーイの定理は

$$\frac{1}{2} V^2 + \frac{P}{\rho} + U = C \quad (C: \text{定数})$$

$$\frac{1}{2} \rho V^2 + P + \rho U = C' \quad (C': \text{定数})$$