



相對論的量子力学

Relativistic quantum mechanics

2022.8.20現在

鹿児島現代物理勉強会

御領 悟志

相対論的量子力学とは

- ・ 原子核の周囲を運動する電子など極微の世界においては、ニュートンの運動方程式では電子の運動を記述できない。
- ・ 19世紀末から20世紀初頭にかけて量子現象が数多く発見され、定式化されていく。
- ・ シュレディンガー方程式もその一つである。
- ・ しかし、このシュレディンガー方程式は特殊相対性理論の要請を満たしてはいない。
- ・ ローレンツ変換を行った後でも物理法則の対称性が保たれる相対論的量子力学の建設が待たれることになる。

シュレディンガー方程式（非相対論的）

$$\frac{1}{2}mv^2 + V = E \quad \longrightarrow \quad \frac{p^2}{2m} + V = E$$

$$\left[p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad p_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \quad p_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \quad E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right]$$

演算子を代入＝量子化

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + V \right] \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

左辺はx, y, zについて2階微分で、右辺は時間tの1階微分である。
ローレンツ対称性はない。

クライン・ゴルドン方程式（概要）

- ・ 初めて波動方程式を相対論的に取り扱った式。
- ・ 特殊相対性理論から導かれるエネルギーと運動量の保存の関係式にそのまま演算子を代入して量子化することで得られる。

$$\frac{E^2}{c^2} - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = m^2 c^2$$

m は、静止質量をあらわす。

クライン・ゴールドン方程式の導出(1)

ローレンツ変換に従う4元ベクトルの4元運動量の内積は、ローレンツ変換において不変量である。このことを用いて相対論的な方程式の定式化を目指す。

$$p^\mu = \begin{bmatrix} \frac{E}{c} & p_x & p_y & p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{c} & \mathbf{p} \end{bmatrix} \quad p_\mu = \begin{bmatrix} \frac{E}{c} & -p_x & -p_y & -p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{c} & -\mathbf{p} \end{bmatrix}$$

$$\frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = \frac{E^2}{c^2} - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = m^2 c^2 \quad \dots \textcircled{1}$$



演算子を代入 = 量子化

$$\left[p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad p_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \quad p_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \quad E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right]$$

クライン・ゴルドン方程式の導出(2)

$$\frac{1}{c^2} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 - \left\{ \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \right\} = m^2 c^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) = -\frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right] \psi = 0 \quad \dots \textcircled{4}$$

相対論的波動方程式の一つ

クライン・ゴルドン方程式の展開(1)

$$\left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right] \psi = 0 \quad \longrightarrow \quad \left[\partial^\mu \partial_\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right] \psi = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^0} & \nabla \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_0} & -\nabla \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} & -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\partial_\mu \partial^\mu = \partial^\mu \partial_\mu \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \quad \psi = N e^{i \frac{(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)}{\hbar}} \quad \text{と解を仮定すると}$$

$$\left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right] N e^{i \frac{(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)}{\hbar}} = 0 \quad \left[-\frac{E^2}{c^2 \hbar^2} + \frac{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)}{\hbar^2} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right] N e^{i \frac{(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)}{\hbar}} = 0$$

$$\left[-\frac{E^2}{\hbar^2 c^2} + \frac{p^2}{\hbar^2} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right] = 0 \quad \frac{E^2}{c^2} = p^2 + m^2 c^2 \quad E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4 \quad E = \pm \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4} \quad \cdots \textcircled{2}$$

エネルギーEには、負の解も含まれる。

クライン・ゴルドン方程式・確率密度の流れ(1)

$$\left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\psi \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi^* - \psi^* \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\psi \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial t^2} - \psi \nabla^2 \psi^* + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \psi \psi^* - \psi^* \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \psi^* \nabla^2 \psi - \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \psi^* \psi = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\frac{1}{c^2} \psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial t^2} - \psi \nabla^2 \psi^* - \frac{1}{c^2} \psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \psi^* \nabla^2 \psi = 0 \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\frac{1}{c^2} \psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\psi^* \nabla^2 \psi + \psi \nabla^2 \psi^* \quad \frac{i\hbar}{2mc^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) = \frac{i\hbar}{2m} \nabla \cdot (-\psi^* \nabla \psi + \psi \nabla \psi^*) \quad \dots \textcircled{5}$$

クライン・ゴールドン方程式・確率密度の流れ(2)

前シートの⑤式を変形する。

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{i\hbar}{2mc^2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) = -\nabla \frac{\hbar}{2mi} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \quad \dots \textcircled{6}$$

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \quad \vec{J} = \frac{\hbar}{2mi} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \quad \text{とおくと}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho = -\nabla \vec{J} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \vec{J} = 0 \quad \dots \textcircled{7}$$

粒子の確率密度の流れを表す式と見なせる。

クライン・ゴルドン方程式・確率密度の流れ(3)

ρ と $\vec{J}$ について

$$\psi = Ne^{i\frac{(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}{\hbar}} \quad \psi^* = Ne^{-i\frac{(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}{\hbar}}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -i\frac{E}{\hbar}Ne^{i\frac{(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}{\hbar}} \quad \frac{\partial\psi^*}{\partial t} = i\frac{E}{\hbar}Ne^{-i\frac{(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}{\hbar}}$$

$$\psi^* \frac{\partial\psi}{\partial t} = Ne^{-i\frac{(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}{\hbar}} \left(-i\frac{E}{\hbar} \right) Ne^{i\frac{(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}{\hbar}} = -i\frac{E}{\hbar} N^2$$

$$\psi \frac{\partial\psi^*}{\partial t} = Ne^{i\frac{(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}{\hbar}} \left(i\frac{E}{\hbar} \right) Ne^{-i\frac{(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}{\hbar}} = i\frac{E}{\hbar} N^2$$

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2} \left(\psi^* \frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial\psi^*}{\partial t} \right)$$

$$= \frac{i\hbar}{2mc^2} \left(-i\frac{E}{\hbar} N^2 - i\frac{E}{\hbar} N^2 \right) = \frac{E}{mc^2} N^2 \dots \textcircled{8}$$

$$\psi^* \nabla \psi = N^2 e^{-i\frac{(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}{\hbar}} \nabla e^{i\frac{(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}{\hbar}} = iN^2 \frac{\vec{p}}{\hbar}$$

$$-\psi \nabla \psi^* = -N^2 e^{i\frac{(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}{\hbar}} \nabla e^{-i\frac{(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}{\hbar}} = iN^2 \frac{\vec{p}}{\hbar}$$

$$\vec{J} = \frac{\hbar}{2mi} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) = \frac{\hbar}{2mi} i2N^2 \frac{\vec{p}}{\hbar} = \frac{\vec{p}}{m} N^2 \dots \textcircled{9}$$

$$\rho = \frac{E}{mc^2} N^2 \quad \vec{J} = \frac{\vec{p}}{m} N^2$$

確率密度 ρ が E に比例し、正にも負にも
なってしまう。

他に相対論的な量子力学の方程式は無いの
か？

クライン・ゴールドン方程式・確率密度の流れ(4)

⑤式より

$$\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial}{\partial ct} \left(-\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial ct} + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial ct} \right) - \frac{i\hbar}{2m} \nabla \cdot (-\psi^* \nabla \psi + \psi \nabla \psi^*) = 0 \quad \frac{i\hbar}{2m} \left[\frac{\partial}{\partial ct} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial ct} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial ct} \right) - \nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \right] = 0$$

$$\frac{i\hbar}{2m} \left[\partial_0 (\psi^* \partial_0 \psi - \psi \partial_0 \psi^*) - \partial_i (\psi^* \partial_i \psi - \psi \partial_i \psi^*) \right] = 0 \quad \frac{i\hbar}{2m} \left[\partial_0 (\psi^* \partial^0 \psi - \psi \partial^0 \psi^*) + \partial_i (\psi^* \partial^i \psi - \psi \partial^i \psi^*) \right] = 0$$

$i = 1, 2, 3$

$$\partial_\mu \left[\frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*) \right] = 0 \quad \dots \textcircled{10}$$

$\mu = 0, 1, 2, 3$

$$J^\mu = \frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*) \quad \longrightarrow \quad \partial_\mu J^\mu = 0 \quad \dots \textcircled{11}$$

Paul Adrien Maurice Dirac



- 三ヶ月間書齋にこもり思索を続けたとのこと。
- **相対論と量子力学を融合**させ、新たな局面を拓いていく。
- 物理法則は美しくなければならぬ。その後、物理法則における対称性が重用視されていく。

Physical law should have mathematical beauty!

Diracの着眼点

2次方程式だから**因数分解**できる？

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - \mathbf{p}^2 - m^2 c^2 = 0 \longleftrightarrow \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \left(\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 c^2}\right)^2 = 0$$
$$\updownarrow$$
$$(x + \alpha)(x - \alpha) = 0$$

Dirac方程式(1928年)の概要

- クライン・ゴルドン方程式は、時間も空間も2階の微分方程式であり、また確率密度が負になることもある。ローレンツ変換に従う、時間と空間を対等に1階の微分方程式で表すことは出来ないか？ディラックがその解決に取り組むことになる。

$$\frac{E^2}{c^2} - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 - m^2 c^2 = 0$$

二次の方程式を一次の方程式に因数分解できないか？



$$\left(\frac{E}{c} + \alpha_x p_x + \alpha_y p_y + \alpha_z p_z + \beta m c \right) \left(\frac{E}{c} - \alpha_x p_x - \alpha_y p_y - \alpha_z p_z - \beta m c \right) = 0$$

Dirac方程式の導出過程(1)

4元運動量

$$p^\mu = \begin{bmatrix} \frac{E}{c} & p_x & p_y & p_z \end{bmatrix} = [p^0 \ p^1 \ p^2 \ p^3]$$
$$p_\mu = \begin{bmatrix} \frac{E}{c} & -p_x & -p_y & -p_z \end{bmatrix} = [p^0 \ -p^1 \ -p^2 \ -p^3]$$

ローレンツ不変量(スカラー量)

$$p^\mu p_\mu = p_\mu p^\mu = m^2 c^2 \quad \dots \textcircled{1}$$
$$\frac{E^2}{c^2} - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = m^2 c^2$$

①式を変形して4元運動量の形式で書き下すと次のようになる

$$p^\mu p_\mu - m^2 c^2 = (p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 - m^2 c^2 = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

次のような一次式の積を考える(因数分解)

$$(\gamma^\lambda p_\lambda - mc)(\gamma^k p_k + mc) \quad \dots \textcircled{3}$$

Dirac方程式の導出過程(2)

$$\begin{aligned}
 (\gamma^\lambda p_\lambda - mc)(\gamma^k p_k + mc) &= (\gamma^0 p_0 + \gamma^1 p_1 + \gamma^2 p_2 + \gamma^3 p_3 - mc)(\gamma^0 p_0 + \gamma^1 p_1 + \gamma^2 p_2 + \gamma^3 p_3 + mc) \\
 &= (\gamma^0 p^0 - \gamma^1 p^1 - \gamma^2 p^2 - \gamma^3 p^3 - mc)(\gamma^0 p^0 - \gamma^1 p^1 - \gamma^2 p^2 - \gamma^3 p^3 + mc) \\
 &= (\gamma^0)^2 (p^0)^2 + (\gamma^1)^2 (p^1)^2 + (\gamma^2)^2 (p^2)^2 + (\gamma^3)^2 (p^3)^2 - (mc)^2 \\
 &\quad - (\gamma^0 \gamma^1 + \gamma^1 \gamma^0) p^0 p^1 - (\gamma^0 \gamma^2 + \gamma^2 \gamma^0) p^0 p^2 - (\gamma^0 \gamma^3 + \gamma^3 \gamma^0) p^0 p^3 \\
 &\quad + (\gamma^1 \gamma^2 + \gamma^2 \gamma^1) p^1 p^2 + (\gamma^1 \gamma^3 + \gamma^3 \gamma^1) p^1 p^3 + (\gamma^2 \gamma^3 + \gamma^3 \gamma^2) p^2 p^3 \quad \dots \textcircled{4}
 \end{aligned}$$

$\left[\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad (\gamma^0)^2 = 1 \quad (\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = -1 \right]$ の関係式が成立するならば
 前ページ②の関係式より

$$(\gamma^\lambda p_\lambda - mc)(\gamma^k p_k + mc) = (p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 - (mc)^2 = 0 \quad \dots \textcircled{5}$$

$$\begin{aligned}
 (\gamma^\lambda p_\lambda - mc) &= 0 \quad \text{または} \quad (\gamma^k p_k + mc) = 0 \\
 p_1 = -p_x = i\hbar \frac{\partial}{\partial x} = i\hbar \frac{\partial}{\partial x^1} = i\hbar \partial_1 \quad \text{なので} \quad p_\mu &= i\hbar \partial_\mu
 \end{aligned}$$

ディラック方程式

$$(i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu - mc)\psi = 0 \quad \dots \textcircled{6}$$

$\mu = 0, 1, 2, 3$

Dirac方程式の導出過程(3)

(1) 最も一般的なディラック方程式

$$(i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu - mc)\psi = 0 \quad \dots \textcircled{6}$$

$\mu = 0, 1, 2, 3$

(2) 他の表記の仕方 パウリ行列を用いた行列 α と β を用いた式

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[-i\hbar c \left(\alpha_x \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_y \frac{\partial}{\partial y} + \alpha_z \frac{\partial}{\partial z} \right) + \beta mc^2 \right] \psi \quad \dots \textcircled{7}$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-i\hbar c \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta mc^2 \right) \psi$$

歴史的な順番から言えば、 α と β 行列を用いる⑦式の方が、先のように思う。 γ 行列は、 α と β 行列から導かれる。⑦式から⑥式も導ける。

Dirac方程式の特徴(1)

- ・ ディラック方程式は、4行4列の行列 $\gamma \cdot \alpha \cdot \beta$ などを用いて表され、数字の組み合わせのみでは表されない。
- ・ 波動関数 ψ は、4成分で表される。
- ・ **スピン** の概念が、方程式の中に含まれており、自動的に導かれる。
- ・ クライン・ゴルドン方程式と同様に、負のエネルギー解が含まれる。
- ・ 負のエネルギー解は、陽電子などの**反物質**粒子の従う波動関数と後に解釈される。
- ・ 2成分が物質粒子、残り2成分が反物質粒子の波動関数である。

Dirac方程式・確率密度の流れ(1)

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad \psi^\dagger = (\psi^*)^T = (\psi_1^* \quad \psi_2^* \quad \psi_3^* \quad \psi_4^*)$$

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 = (\psi_1^* \quad \psi_2^* \quad \psi_3^* \quad \psi_4^*) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= (\psi_1^* \quad \psi_2^* \quad -\psi_3^* \quad -\psi_4^*)$$

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi = 0 \quad \dots\textcircled{1}$$

複素共役をとると $(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi)^\dagger - (mc\psi)^\dagger = 0 \dots\textcircled{2}$

右辺から γ^0 を掛ける

$$-i\hbar\partial_\mu\psi^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 - mc\psi^\dagger\gamma^0 = 0 \quad \dots\textcircled{3}$$

$$i\hbar\partial_\mu\psi^\dagger\gamma^\mu\gamma^0 - mc\psi^\dagger\gamma^0 = 0 \quad -i\hbar\partial_\mu\psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu - mc\psi^\dagger\gamma^0 = 0$$

$$i\hbar\partial_\mu(\psi^\dagger\gamma^0)\gamma^\mu + mc(\psi^\dagger\gamma^0) = 0 \quad i\hbar\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu) + mc\bar{\psi} = 0$$

$$[i\hbar\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu)]\psi + mc\bar{\psi}\psi = 0 \quad \dots\textcircled{4}$$

$$i\hbar\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = i\hbar\bar{\psi}\partial_\mu(\gamma^\mu\psi) + i\hbar(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi$$

$$= \bar{\psi}(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi) + (i\hbar\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi$$

$$= \bar{\psi}(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi) + (i\hbar\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu)\psi$$

$$= \bar{\psi}mc\psi - mc\bar{\psi}\psi = mc\bar{\psi}\psi - mc\bar{\psi}\psi = 0 \quad \dots\textcircled{5}$$

Dirac方程式・確率密度の流れ(2)

前シート⑤の結果より

$$\partial_{\mu}(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi) = 0 \quad \dots \textcircled{6} \quad J^{\mu} = \bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi \quad J^{\mu} = \begin{pmatrix} \bar{\psi}\gamma^0\psi & \bar{\psi}\vec{\gamma}\psi \end{pmatrix}$$



$$\partial_{\mu}J^{\mu} = 0 \quad \dots \textcircled{7}$$

$$\bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^{\dagger}\gamma^0\gamma^0\psi = \psi^{\dagger}(\gamma^0)^2\psi = \psi^{\dagger}\psi = \psi_1^*\psi_1 + \psi_2^*\psi_2 + \psi_3^*\psi_3 + \psi_4^*\psi_4 = \rho \quad \dots \textcircled{8}$$

確率密度 ρ が、負の値になることはない。

$$\vec{J} = \bar{\psi}\vec{\gamma}\psi \quad \dots \textcircled{9} \text{ とおくと}$$

⑧⑨の結果より

$$J^{\mu} = \begin{pmatrix} \rho & \vec{J} \end{pmatrix} \quad \text{と書ける。⑦式は次のようになる。}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad \dots \textcircled{10}$$

Pauli-Diracの表現(1)

①パウリ行列(2行2列) → スピンを表現するのに使われる

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

②パウリ行列を用いた行列 α と β の定義(4行4列)

$$\alpha_x = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{bmatrix} \quad \alpha_y = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{bmatrix} \quad \alpha_z = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$$

③パウリ行列(2行2列)のもつ関係式

$$\sigma_x^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$\sigma_y^2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$\sigma_z^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$\sigma_x \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \quad \sigma_y \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

$$\sigma_y \sigma_z = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_z \sigma_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_z \sigma_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_x \sigma_z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_y = 0$$

$$\sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_y = 2i\sigma_x$$

$$\sigma_z \sigma_x + \sigma_x \sigma_z = 0$$

$$\sigma_z \sigma_x - \sigma_x \sigma_z = 2i\sigma_y$$

$$\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_x = 0$$

$$\sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_x = 2i\sigma_z$$

$$\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij}$$

$$\vec{\sigma} \times \vec{\sigma} = 2i\vec{\sigma}$$

Pauli-Diracの表現(2)

④ α 、 β 行列の関係式の確認

$$\alpha_x \alpha_y + \alpha_y \alpha_x = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\alpha_y \alpha_z + \alpha_z \alpha_y = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_y & 0 \\ 0 & \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\alpha_z \alpha_x + \alpha_x \alpha_z = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_z \sigma_x + \sigma_x \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \sigma_x + \sigma_x \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\alpha_x \beta = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{bmatrix} \quad \beta \alpha_x = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_x \\ -\sigma_x & 0 \end{bmatrix} \quad \alpha_x \beta + \beta \alpha_x = 0$$

$$\alpha_y \beta = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{bmatrix} \quad \beta \alpha_y = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_y \\ -\sigma_y & 0 \end{bmatrix} \quad \alpha_y \beta + \beta \alpha_y = 0$$

$$\alpha_z \beta = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{bmatrix} \quad \beta \alpha_z = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_z \\ -\sigma_z & 0 \end{bmatrix} \quad \alpha_z \beta + \beta \alpha_z = 0$$

Pauli-Diracの表現(3)

⑤ γ 行列の定義と関係式

$$\beta^2 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = I$$

$$\alpha_x^2 = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & 0 \\ 0 & \sigma_x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = I$$

$$\alpha_y^2 = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_y^2 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = I$$

$$\alpha_z^2 = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_z^2 & 0 \\ 0 & \sigma_z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = I$$

$$\gamma^0 = \beta = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$$

$$\gamma^1 = \beta \alpha_x = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_x \\ -\sigma_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma^2 = \beta \alpha_y = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_y \\ -\sigma_y & 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma^3 = \beta \alpha_z = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_z \\ -\sigma_z & 0 \end{bmatrix}$$

ゆえに一般的な表現として x, y, z をそれぞれ $k = 1, 2, 3$ と表すと

$$\gamma^k = \beta \alpha_k = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{bmatrix}$$

Pauli-Diracの表現(4)

$$(\gamma^0)^2 = \beta^2 = I$$

$$(\gamma^1)^2 = \beta\alpha_x\beta\alpha_x = -\alpha_x\beta\beta\alpha_x = -\alpha_x\beta^2\alpha_x = -\alpha_x I\alpha_x = -\alpha_x^2 = -I$$

$$(\gamma^2)^2 = \beta\alpha_y\beta\alpha_y = -\alpha_y\beta\beta\alpha_y = -\alpha_y\beta^2\alpha_y = -\alpha_y I\alpha_y = -\alpha_y^2 = -I$$

$$(\gamma^3)^2 = \beta\alpha_z\beta\alpha_z = -\alpha_z\beta\beta\alpha_z = -\alpha_z\beta^2\alpha_z = -\alpha_z I\alpha_z = -\alpha_z^2 = -I$$

$$\gamma^0\gamma^j + \gamma^j\gamma^0 = \beta\beta\alpha_j + \beta\alpha_j\beta = \beta\beta\alpha_j - \alpha_j\beta\beta = \alpha_j - \alpha_j = 0$$

$$\gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i = \beta\alpha_i\beta\alpha_j + \beta\alpha_j\beta\alpha_i = -\alpha_i\beta\beta\alpha_j - \alpha_j\beta\beta\alpha_i = -\alpha_i\alpha_j - \alpha_j\alpha_i = -(\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i) = 0$$

したがって一般的な表現として

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$$

$$[g^{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ローレンツ対称性について

$i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi = mc\psi$ Dirac方程式がローレンツ対称性を持つか調べる。

$\partial'_\nu = L^\mu_\nu\partial_\mu \dots \textcircled{1}$ ローレンツ変換後に波動関数 $\psi(x)$

が、新しい座標系の波動関数 $\psi'(x')$ に行列 S で変換されたとする。

$\psi'(x')$ の各成分が $\psi(x)$ の一次結合で表されるということ。

$\psi'(x') = S\psi(x) \dots \textcircled{2}$ $i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi = mc\psi \dots \textcircled{3}$

$i\hbar S\gamma^\mu\partial_\mu\psi = mcS\psi \dots \textcircled{4}$

$i\hbar\gamma^\nu\partial'_\nu\psi' = mc\psi' \dots \textcircled{5}$ に①②を代入すると

$i\hbar\gamma^\nu L^\mu_\nu\partial_\mu\psi' = mc\psi'$

$i\hbar\gamma^\nu L^\mu_\nu\partial_\mu S\psi = mcS\psi \dots \textcircled{6}$

④と⑥から

$i\hbar S\gamma^\mu\partial_\mu\psi = i\hbar\gamma^\nu L^\mu_\nu\partial_\mu S\psi$

$i\hbar S\gamma^\mu\partial_\mu\psi = i\hbar\gamma^\nu L^\mu_\nu S\partial_\mu\psi$

$[S\gamma^\mu = \gamma^\nu L^\mu_\nu S] \dots \textcircled{7}$

の条件を満たす S が存在するときに③から

$i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi = mc\psi$



$i\hbar S\gamma^\mu\partial_\mu\psi = mcS\psi$ ⑦を代入すると

$i\hbar\gamma^\nu L^\mu_\nu S\partial_\mu\psi = mcS\psi \dots \textcircled{8}$

$i\hbar\gamma^\nu L^\mu_\nu\partial_\mu(S\psi) = mc(S\psi) \dots \textcircled{9}$

$i\hbar\gamma^\nu\partial'_\nu\psi' = mc\psi' \dots \textcircled{10}$

ディラック方程式は、ローレンツ変換に対して対称性を保つ式である。

スピン(1)

- ・ ディラック方程式における相対論的ハミルトニアンHは、自由粒子の場合 $U=0$ なので

$$H = \left(-i\hbar c \left(\alpha_x \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_y \frac{\partial}{\partial y} + \alpha_z \frac{\partial}{\partial z} \right) + \beta mc^2 \right)$$

電子の軌道角運動量 $\vec{L}$ の各成分

$$l_x = -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$l_y = -i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$l_z = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

相対論的ハミルトニアンとの交換関係を求めると

$$\begin{aligned} [H, l_x] &= H l_x - l_x H \\ &= \left(-i\hbar c \left(\alpha_x \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_y \frac{\partial}{\partial y} + \alpha_z \frac{\partial}{\partial z} \right) + \beta mc^2 \right) \left(-i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \right) \\ &\quad - \left(-i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \right) \left(-i\hbar c \left(\alpha_x \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_y \frac{\partial}{\partial y} + \alpha_z \frac{\partial}{\partial z} \right) + \beta mc^2 \right) \end{aligned}$$

スピン(2)

$$(-i\hbar)^2 c \alpha_x \frac{\partial}{\partial x} (y \frac{\partial}{\partial z}) + (-i\hbar)^2 c \alpha_x \frac{\partial}{\partial x} (-z \frac{\partial}{\partial y}) = (-i\hbar)^2 c \alpha_x \{y \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} - z \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\}$$

$$(-i\hbar)^2 c \alpha_y \frac{\partial}{\partial y} (y \frac{\partial}{\partial z}) + (-i\hbar)^2 c \alpha_y \frac{\partial}{\partial y} (-z \frac{\partial}{\partial y}) = (-i\hbar)^2 c \alpha_y \{\frac{\partial}{\partial z} + y \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} - z \frac{\partial^2}{\partial y^2}\}$$

$$(-i\hbar)^2 c \alpha_z \frac{\partial}{\partial z} (y \frac{\partial}{\partial z}) + (-i\hbar)^2 c \alpha_z \frac{\partial}{\partial z} (-z \frac{\partial}{\partial y}) = (-i\hbar)^2 c \alpha_z \{y \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial y} - z \frac{\partial^2}{\partial z \partial y}\}$$

$$-i\hbar(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y})(-i\hbar c \alpha_x \frac{\partial}{\partial x}) = (-i\hbar)^2 c \alpha_x \{y \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} - z \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\}$$

$$-i\hbar(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y})(-i\hbar c \alpha_y \frac{\partial}{\partial y}) = (-i\hbar)^2 c \alpha_y \{y \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} - z \frac{\partial^2}{\partial y^2}\}$$

$$-i\hbar(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y})(-i\hbar c \alpha_z \frac{\partial}{\partial z}) = (-i\hbar)^2 c \alpha_z \{y \frac{\partial^2}{\partial z^2} - z \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\}$$

$$[H, l_x] = -\hbar^2 c \{ \alpha_y \frac{\partial}{\partial z} - \alpha_z \frac{\partial}{\partial y} \}$$

同様にして

$$[H, l_y] = -\hbar^2 c \{ \alpha_z \frac{\partial}{\partial x} - \alpha_x \frac{\partial}{\partial z} \} \quad [H, l_z] = -\hbar^2 c \{ \alpha_x \frac{\partial}{\partial y} - \alpha_y \frac{\partial}{\partial x} \}$$

相対論的ハミルトニアンと軌道角運動量の間には交換関係が成り立たない。

$$\Sigma_x = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{bmatrix} \quad \Sigma_y = \begin{bmatrix} \sigma_y & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{bmatrix} \quad \Sigma_z = \begin{bmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$[\alpha_x, \Sigma_x] = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_x^2 - \sigma_x^2 \\ \sigma_x^2 - \sigma_x^2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\alpha_x, \Sigma_y] = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_y & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_y & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_x \\ \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2i\sigma_z \\ 2i\sigma_z & 0 \end{bmatrix} = 2i \begin{bmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{bmatrix} = 2i\alpha_z$$

$$[\alpha_x, \Sigma_z] = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_x \sigma_z - \sigma_z \sigma_x \\ \sigma_x \sigma_z - \sigma_z \sigma_x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2i\sigma_y \\ -2i\sigma_y & 0 \end{bmatrix} = -2i \begin{bmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{bmatrix} = -2i\alpha_y$$

$$[\alpha_y, \Sigma_x] = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_y \sigma_x - \sigma_x \sigma_y \\ \sigma_y \sigma_x - \sigma_x \sigma_y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2i\sigma_z \\ -2i\sigma_z & 0 \end{bmatrix} = -2i \begin{bmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{bmatrix} = -2i\alpha_z$$

スピン(3)

$$[\alpha_y, \Sigma_y] = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_y & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_y & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \sigma_y^2 - \sigma_y^2 \\ \sigma_y^2 - \sigma_y^2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\alpha_y, \Sigma_z] = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_y \\ \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2i\sigma_x \\ 2i\sigma_x & 0 \end{bmatrix} = 2i \begin{bmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{bmatrix} = 2i\alpha_x$$

$$[\alpha_z, \Sigma_x] = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \sigma_z \sigma_x - \sigma_x \sigma_z \\ \sigma_z \sigma_x - \sigma_x \sigma_z & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2i\sigma_y \\ 2i\sigma_y & 0 \end{bmatrix} = 2i\alpha_y$$

$$[\alpha_z, \Sigma_y] = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_y & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_y & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \sigma_z \sigma_y - \sigma_y \sigma_z \\ \sigma_z \sigma_y - \sigma_y \sigma_z & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2i\sigma_x \\ -2i\sigma_x & 0 \end{bmatrix} = -2i \begin{bmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{bmatrix} = -2i\alpha_x$$

$$[\alpha_z, \Sigma_z] = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_z^2 - \sigma_z^2 \\ \sigma_z^2 - \sigma_z^2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\beta, \Sigma_x] = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_x & 0 \\ 0 & -\sigma_x + \sigma_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\beta, \Sigma_y] = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_y & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_y & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_y - \sigma_y & 0 \\ 0 & -\sigma_y + \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\beta, \Sigma_z] = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_z - \sigma_z & 0 \\ 0 & -\sigma_z + \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

相対論的ハミルトニアンとシグマ行列との交換関係を調べると

$$\begin{aligned} [H, \Sigma_x] &= \left(-i\hbar c \left(\alpha_x \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_y \frac{\partial}{\partial y} + \alpha_z \frac{\partial}{\partial z} \right) + \beta mc^2 \right) (\Sigma_x) \\ &\quad - (\Sigma_x) \left(-i\hbar c \left(\alpha_x \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_y \frac{\partial}{\partial y} + \alpha_z \frac{\partial}{\partial z} \right) + \beta mc^2 \right) \\ &= -i\hbar c \left(\alpha_x \Sigma_x \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_y \Sigma_x \frac{\partial}{\partial y} + \alpha_z \Sigma_x \frac{\partial}{\partial z} \right) + mc^2 \beta \Sigma_x \\ &\quad - \left(-i\hbar c \left(\alpha_x \Sigma_x \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_y \Sigma_x \frac{\partial}{\partial y} + \alpha_z \Sigma_x \frac{\partial}{\partial z} \right) + mc^2 \beta \Sigma_x \right) \end{aligned}$$

スピン(4)

$$= -i\hbar c(\{\alpha_x \Sigma_x - \Sigma_x \alpha_x\} \frac{\partial}{\partial x} + \{\alpha_y \Sigma_x - \Sigma_x \alpha_y\} \frac{\partial}{\partial y} + \{\alpha_z \Sigma_x - \Sigma_x \alpha_z\} \frac{\partial}{\partial z}) + mc^2 \{\beta \Sigma_x - \Sigma_x \beta\}$$

$$= -i\hbar c([\alpha_x, \Sigma_x] \frac{\partial}{\partial x} + [\alpha_y, \Sigma_x] \frac{\partial}{\partial y} + [\alpha_z, \Sigma_x] \frac{\partial}{\partial z}) + mc^2 [\beta, \Sigma_x]$$

$$[H, \Sigma_x] = -i\hbar c(-2i\alpha_z \frac{\partial}{\partial y} + 2i\alpha_y \frac{\partial}{\partial z}) = 2\hbar c(\alpha_y \frac{\partial}{\partial z} - \alpha_z \frac{\partial}{\partial y})$$

$$[H, \Sigma_y] = 2\hbar c(\alpha_z \frac{\partial}{\partial x} - \alpha_x \frac{\partial}{\partial z}) \quad [H, \Sigma_z] = 2\hbar c(\alpha_x \frac{\partial}{\partial y} - \alpha_y \frac{\partial}{\partial x})$$

$$[H, \frac{1}{2} \hbar \Sigma_x] = \hbar^2 c(\alpha_y \frac{\partial}{\partial z} - \alpha_z \frac{\partial}{\partial y}) \quad [H, l_x] = -\hbar^2 c\{\alpha_y \frac{\partial}{\partial z} - \alpha_z \frac{\partial}{\partial y}\}$$

$$[H, l_x + \frac{1}{2} \hbar \Sigma_x] = 0$$

同様にして、全角運動量の各成分の交換関係は次の通りになる。

$$[H, l_y + \frac{1}{2} \hbar \Sigma_y] = 0 \quad [H, l_z + \frac{1}{2} \hbar \Sigma_z] = 0$$

$$s_x = \frac{1}{2} \hbar \Sigma_x, s_y = \frac{1}{2} \hbar \Sigma_y, s_z = \frac{1}{2} \hbar \Sigma_z$$

$$[H, l_x + s_x] = 0$$

$$[H, l_y + s_y] = 0$$

$$[H, \vec{L} + \vec{s}] = 0$$

$$[H, l_z + s_z] = 0$$

このことから、軌道角運動量の他に、電子に固有の角運動量(スピン)を付け加えた全角運動量

$$\vec{L} = \vec{L} + \vec{s}$$

が、相対論的ハミルトニアンと可換な量となり保存量である。

保存量の条件

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle \hat{Q} \rangle = \langle [\hat{Q}, \hat{H}] \rangle + i\hbar \left\langle \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} \right\rangle$$

物理量 $\hat{Q}$ の期待値 $\langle \hat{Q} \rangle$ が変化しない。 $\Rightarrow$ $\hat{Q}$ が保存量 $\iff i\hbar \frac{d}{dt} \langle \hat{Q} \rangle = 0$

$\hat{Q}$ が時間的に変化しない量で t を含まないならば $\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} = 0$

したがって $\langle [\hat{Q}, \hat{H}] \rangle = 0$

物理量 $\hat{Q}$ の保存則が成り立つ必要十分条件 $\Rightarrow [\hat{Q}, \hat{H}] = 0$

ハミルトニアン H と交換関係にある物理量は保存量である。

軌道角運動量(1)

シュレディンガー方程式におけるハミルトニアンHと、電子の軌道角運動量Lについて

$$H = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2} \right) + U \right)$$

電子の軌道角運動量 $\vec{L} = \begin{bmatrix} l_x & l_y & l_z \end{bmatrix}$

$$l_x = -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$l_y = -i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$l_z = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

ハミルトニアンとの交換関係を求めると、以下の通りになる。。

$$[H, l_x] = Hl_x - l_x H = 0$$

$$[H, l_y] = Hl_y - l_y H = 0$$

$$[H, l_z] = Hl_z - l_z H = 0$$

Dirac方程式の解(1)

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi = 0 \quad \dots\textcircled{1} \quad \text{ここから先の議論においては、}\underline{\text{自然単位系を用いて議論}}\text{を簡単にする。}$$

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0 \quad \dots\textcircled{2} \quad \hbar=c=1 \text{ とおく。}$$

$$p^\mu = (E, p_x, p_y, p_z) \quad p_\mu = (E, -p_x, -p_y, -p_z) \quad x^\mu = (t, x, y, z) \quad x_\mu = (t, -x, -y, -z)$$

$$\psi = u(p^\mu)e^{-ip^\mu x_\mu} = u(E, \vec{p})e^{-i(Et - p_x x - p_y y - p_z z)}$$

$$= u(E, \vec{p})e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{r})} = u(E, \vec{p})e^{i(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)} \quad \dots\textcircled{3} \quad (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)u(E, \vec{p})e^{-i(Et - p_x x - p_y y - p_z z)} = 0 \quad \dots\textcircled{4}$$

$$(i(-i)\gamma^0 E + i(-i)\gamma^1(-p_x) + i(-i)\gamma^2(-p_y) + i(-i)\gamma^3(-p_z) - m)u(E, \vec{p})e^{-i(Et - p_x x - p_y y - p_z z)} = 0 \quad \dots\textcircled{5}$$

$$(\gamma^0 E - \gamma^1 p_x - \gamma^2 p_y - \gamma^3 p_z - m)u(E, \vec{p})e^{-i(Et - p_x x - p_y y - p_z z)} = 0 \quad \dots\textcircled{6}$$

$$(\gamma^0 E + \gamma^1 p_1 + \gamma^2 p_2 + \gamma^3 p_3 - m)u = 0 \quad (\gamma^\mu p_\mu - m)u = 0 \quad \dots\textcircled{7}$$

Dirac方程式の解(粒子が静止しているとき)

$$\vec{p} = 0 \quad (\gamma^0 p_0 - m)u = (\gamma^0 E - m)u = \gamma^0 Eu - mu = 0$$

$$\gamma^0 Eu = mu \quad \Rightarrow \quad \gamma^0 E = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} E$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} Eu = mu \quad \begin{bmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix}$$

$$E\varphi_1 = m\varphi_1$$

$$E\varphi_3 = -m\varphi_3$$

$$E\varphi_2 = m\varphi_2$$

$$E\varphi_4 = -m\varphi_4$$

$$E = m > 0 \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad E = -m < 0 \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_1(m,0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad u_2(m,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad u_3(-m,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad u_4(-m,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{p} = 0 \quad \text{なので}$$

$$\psi = u(E, \vec{p}) e^{i(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)} \quad \psi = u(E, 0) e^{-iEt}$$

$$E > 0 \quad \text{のとき}$$

$$\psi_1 = u_1(m,0) e^{-iEt} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-imt} \quad \psi_2 = u_2(m,0) e^{-iEt} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-imt}$$

$$E < 0 \quad \text{のとき}$$

$$\psi_3 = u_3(-m,0) e^{-i(-m)t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{imt} \quad \psi_4 = u_4(-m,0) e^{-i(-m)t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{imt}$$

Dirac方程式の解(粒子が運動しているとき)①

$$\vec{p} \neq 0 \text{ なので } (\gamma^0 E + \gamma^1 p_1 + \gamma^2 p_2 + \gamma^3 p_3 - m)u = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} E + \begin{bmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{bmatrix} p_1 + \begin{bmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{bmatrix} p_2 + \begin{bmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{bmatrix} p_3 - \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} m \right) u = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\left(\begin{bmatrix} EI & 0 \\ 0 & -EI \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \sigma_1 \cdot p_1 \\ -\sigma_1 \cdot p_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \sigma_2 \cdot p_2 \\ -\sigma_2 \cdot p_2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \sigma_3 \cdot p_3 \\ -\sigma_3 \cdot p_3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} mI & 0 \\ 0 & mI \end{bmatrix} \right) u = 0$$

$$\begin{pmatrix} (E-m)I & \sigma_1 \cdot p_1 + \sigma_2 \cdot p_2 + \sigma_3 \cdot p_3 \\ -(\sigma_1 \cdot p_1 + \sigma_2 \cdot p_2 + \sigma_3 \cdot p_3) & -(E+m)I \end{pmatrix} u = 0 \quad \begin{pmatrix} (E-m)I & -(\sigma_1 \cdot p_x + \sigma_2 \cdot p_y + \sigma_3 \cdot p_z) \\ (\sigma_1 \cdot p_x + \sigma_2 \cdot p_y + \sigma_3 \cdot p_z) & -(E+m)I \end{pmatrix} u = 0$$

$$\begin{pmatrix} (E-m)I & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -(E+m)I \end{pmatrix} u = 0 \quad \cdots \textcircled{3} \quad u = \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} \text{ とおくと}$$

$$\begin{pmatrix} (E-m)I & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -(E+m)I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = 0 \quad \cdots \textcircled{4} \quad \begin{aligned} (E-m)u_A &= \vec{\sigma} \cdot \vec{p} u_B \\ (E+m)u_B &= \vec{\sigma} \cdot \vec{p} u_A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_A &= \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{(E-m)} u_B \\ u_B &= \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{(E+m)} u_A \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{5}$$

Dirac方程式の解(粒子が運動しているとき)②

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} = \sigma_1 p_x + \sigma_2 p_y + \sigma_3 p_z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} p_x + \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} p_y + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} p_z$$

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} = \begin{bmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{bmatrix} \dots \textcircled{6}$$

$$u_B = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{(E+m)} u_A = \frac{1}{(E+m)} \begin{bmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{bmatrix} u_A \dots \textcircled{7}$$

$$u_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ のとき } u_B = \frac{1}{(E+m)} \begin{bmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \dots \textcircled{8}$$

$$u_B = \frac{1}{(E+m)} \begin{bmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E+m} \end{pmatrix} u_1 = N_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E+m} \end{pmatrix} \dots \textcircled{9}$$

$$u_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ のとき } u_B = \frac{1}{(E+m)} \begin{bmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_B = \frac{1}{(E+m)} \begin{bmatrix} p_x - ip_y \\ -p_z \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p_x - ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix} u_2 = N_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x - ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix}$$

$$u_A = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{(E-m)} u_B = \frac{1}{(E-m)} \begin{bmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{bmatrix} u_B$$

$$u_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ のとき } u_A = \frac{1}{(E-m)} \begin{bmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_A = \frac{1}{(E-m)} \begin{bmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E-m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E-m} \end{pmatrix} u_3 = N_3 \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E-m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E-m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dirac方程式の解(粒子が運動しているとき)③

$$u_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ のとき } u_A = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{(E-m)} u_B = \frac{1}{(E-m)} \begin{bmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_A = \frac{1}{(E-m)} \begin{bmatrix} p_x - ip_y \\ -p_z \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p_x - ip_y}{E-m} \\ \frac{-p_z}{E-m} \end{pmatrix} \quad u_4 = N_4 \begin{pmatrix} \frac{p_x - ip_y}{E-m} \\ \frac{-p_z}{E-m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (E-m)I & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -(E+m)I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = 0 \quad \text{が解を持つ条件}$$

$$\begin{vmatrix} (E-m)I & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -(E-m)I \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(E^2 - m^2)I^2 + (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 = 0$$

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 = \begin{bmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{bmatrix}$$

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 = \begin{bmatrix} p_z^2 + p_x^2 + p_y^2 & p_z p_x - ip_z p_y - p_x p_z + ip_y p_z \\ p_x p_z + ip_y p_z - p_z p_x - ip_z p_y & p_z^2 + p_x^2 + p_y^2 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} P^2 & 0 \\ 0 & P^2 \end{bmatrix}$$

$$-(E^2 - m^2) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + P^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (-(E^2 - m^2) + P^2) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$-(E^2 - m^2) + P^2 = 0 \quad E^2 = P^2 + m^2 \quad E = \pm \sqrt{P^2 + m^2}$$

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$$

$$\psi = (\psi_1 \quad \psi_2 \quad \psi_3 \quad \psi_4)$$

Dirac方程式の解(粒子が運動しているとき)④

$$E = \sqrt{P^2 + m^2} > 0$$

$$E = -\sqrt{P^2 + m^2} < 0$$

$$u_1 = N_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E+m} \end{pmatrix} \quad u_2 = N_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x - ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix} \quad u_3 = N_3 \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E-m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E-m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_4 = N_4 \begin{pmatrix} \frac{p_x - ip_y}{E-m} \\ \frac{-p_z}{E-m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$1 = u_1 u_1^* = N_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E+m} \end{pmatrix} N_1^* \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{p_z}{E+m} & \frac{p_x - ip_y}{E+m} \end{pmatrix}$$

$$1 = N_1^2 \left(\frac{p^2 + (E+m)^2}{(E+m)^2} \right) = N_1^2 \left(\frac{E^2 - m^2 + (E+m)^2}{(E+m)^2} \right)$$

$$1 = N_1^2 \left(1 + \frac{p_z^2}{(E+m)^2} + \frac{p_x^2 + p_y^2}{(E+m)^2} \right) = N_1^2 \left(\frac{p_z^2 + p_x^2 + p_y^2 + (E+m)^2}{(E+m)^2} \right)$$

$$1 = N_1^2 \left(\frac{E^2 - m^2 + E^2 + m^2 + 2mE}{(E+m)^2} \right) = N_1^2 \left(\frac{2E(E+m)}{(E+m)^2} \right) = N_1^2 \left(\frac{2E}{E+m} \right)$$

$$N_1 = \sqrt{\frac{E+m}{2E}}, N_2 = \sqrt{\frac{E+m}{2E}}, N_3 = \sqrt{\frac{|E|+m}{2|E|}}, N_4 = \sqrt{\frac{|E|+m}{2|E|}}$$

Dirac方程式の解(粒子が運動しているとき)⑤

$$\psi = u(E, \vec{p}) e^{i(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)} \quad N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = \sqrt{\frac{|E| + m}{2|E|}} \quad E = \pm \sqrt{P^2 + m^2} \quad E_0 = \sqrt{P^2 + m^2}$$

$\vec{p} = 0$ のときの解から類推すると

$$E = E_0 > 0 \text{ のとき}$$

$$\psi_1 = u_1 e^{i(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)} = \sqrt{\frac{|E| + m}{2|E|}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E+m} \end{pmatrix} e^{i(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)}$$

$$\psi_2 = u_2 e^{i(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)} = \sqrt{\frac{|E| + m}{2|E|}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x - ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix} e^{i(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)}$$

$$E = -E_0 < 0 \text{ のとき}$$

$$\psi_3 = u_3 e^{i(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)} = \sqrt{\frac{|E| + m}{2|E|}} \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E-m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E-m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)}$$

$$\psi_4 = u_4 e^{i(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)} = \sqrt{\frac{|E| + m}{2|E|}} \begin{pmatrix} \frac{p_x - ip_y}{E-m} \\ \frac{E-m}{-p_z} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)}$$

反物質粒子の波動関数 (1)

電場中の $q[c]$ の荷電粒子の従うディラック方程式について

$$\vec{p} \Rightarrow \vec{p} - q\vec{A} \quad \text{と書き替える} \quad -i\partial_\mu \Rightarrow -i\partial_\mu - qA_\mu$$

$$\partial_\mu \Rightarrow \partial_\mu - iqA_\mu \quad \dots \textcircled{1}$$

電子については

$$q \Rightarrow -e \quad \partial_\mu \Rightarrow \partial_\mu + ieA_\mu \quad \dots \textcircled{2}$$

ディラック方程式は

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

なので共変微分を代入すると

$$i\gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) \psi - m\psi = 0$$

$$ii\gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) \psi - im\psi = 0$$

$$-\gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) \psi - im\psi = 0$$

電子の従う式方程式は以下の通りになる

$$\gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) \psi + im\psi = 0 \quad \dots \textcircled{4}$$

複素共役をとると

$$\gamma^{\mu*} (\partial_\mu - ieA_\mu) \psi^* - im\psi^* = 0$$

$$-i\gamma^2 \quad \text{を左から書けると}$$

$$-i\gamma^2 \gamma^{\mu*} (\partial_\mu - ieA_\mu) \psi^* + imi\gamma^2 \psi^* = 0$$

$$i\gamma^\mu \gamma^2 (\partial_\mu - ieA_\mu) \psi^* + imi\gamma^2 \psi^* = 0$$

$$\gamma^\mu (\partial_\mu - ieA_\mu) i\gamma^2 \psi^* + imi\gamma^2 \psi^* = 0 \quad \dots \textcircled{5}$$

上式は質量はそのまま電荷の符号を反対にした陽電子の従う方程式と考えられる。

陽電子の波動関数は $\psi' = i\gamma^2 \psi^* \quad \dots \textcircled{6}$

反物質粒子の波動関数（2）

陽電子の波動関数 $\psi' = i\gamma^2\psi^*$

$$\gamma^2 = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_y \\ -\sigma_y & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

$$\psi_1' = i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \psi_1^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \psi_1^*$$

$$\psi_1' = \sqrt{\frac{|E|+m}{2|E|}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E+m} \end{pmatrix}^* e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}$$

$$\psi_1' = \sqrt{\frac{|E|+m}{2|E|}} \begin{pmatrix} \frac{p_x - ip_y}{E+m} \\ -p_z \\ \frac{E+m}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)} \quad \text{と} \quad \psi_4 = u_4 e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)} = \sqrt{\frac{|E|+m}{2|E|}} \begin{pmatrix} \frac{p_x - ip_y}{E-m} \\ -p_z \\ \frac{E-m}{E-m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}$$

ψ_4 の波動関数中の符号を反対にする

$$\psi_4(-E, -\vec{p}) = u_4(-E, -\vec{p}) e^{i((-\vec{p})\cdot\vec{r} - (-E)t)}$$

$$\psi_4(-E, -\vec{p}) = \sqrt{\frac{|E|+m}{2|E|}} \begin{pmatrix} \frac{(-p_x) - i(-p_y)}{(-E)-m} \\ -(-p_z) \\ \frac{(-E)-m}{(-E)-m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i((-\vec{p})\cdot\vec{r} - (-E)t)} = \sqrt{\frac{|E|+m}{2|E|}} \begin{pmatrix} \frac{p_x - ip_y}{E+m} \\ -p_z \\ \frac{E+m}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}$$

$$\psi_4(-E, -\vec{p}) \Rightarrow \psi_1' \quad v_1(E, \vec{p}) = u_4(-E, -\vec{p})$$

反物質粒子の波動関数（3）

陽電子の波動関数

$$\psi' = i\gamma^2 \psi^*$$

$$\gamma^2 = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_y \\ -\sigma_y & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

$$\psi_2' = i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \psi_2^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \psi_2^*$$

$$\psi_2' = \sqrt{\frac{|E|+m}{2|E|}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x - ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix}^* e^{-i(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)}$$

$$\psi_2' = \sqrt{\frac{|E|+m}{2|E|}} \begin{pmatrix} \frac{-p_z}{E+m} \\ \frac{-p_x - ip_y}{E+m} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)} \quad \psi_3 = u_3 e^{i(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)} = \sqrt{\frac{|E|+m}{2|E|}} \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E-m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E-m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)}$$

ψ_3 の波動関数中の符号を反対にする

$$\psi_3(-E, -\vec{p}) = u_3(-E, -\vec{p}) e^{i((-p) \cdot \vec{r} - (-E)t)}$$

$$\psi_3(-E, -\vec{p}) = \sqrt{\frac{|E|+m}{2|E|}} \begin{pmatrix} \frac{(-p_z)}{(-E)-m} \\ \frac{(-p_x) + i(-p_y)}{(-E)-m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i((-p) \cdot \vec{r} - (-E)t)} = -\sqrt{\frac{|E|+m}{2|E|}} \begin{pmatrix} \frac{-p_z}{E+m} \\ \frac{-p_x - ip_y}{E+m} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)}$$

$$\psi_3(-E, -\vec{p}) \Rightarrow -\psi_2' \quad v_2(E, \vec{p}) = -u_3(-E, -\vec{p})$$

反物質粒子の波動関数（４）

陽電子の波動関数

$$\psi' = i\gamma^2 \psi^*$$

$$\gamma^2 = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_y \\ -\sigma_y & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

$$\psi_3' = i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \psi_3^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \psi_3^*$$

$$\psi_3' = \sqrt{\frac{|E|+m}{2|E|}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E-m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E-m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^* e^{-i(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)}$$

$$\psi_3' = \sqrt{\frac{|E|+m}{2|E|}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{p_x - ip_y}{E-m} \\ \frac{p_z}{E-m} \end{pmatrix} e^{-i(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)} \quad \psi_2 = u_2 e^{i(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)} = \sqrt{\frac{|E|+m}{2|E|}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x - ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix} e^{i(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)}$$

ψ_2 の波動関数中の符号を反対にする

$$\psi_2(-E, -\vec{p}) = u_2(-E, -\vec{p}) e^{i((-\vec{p}) \cdot \vec{r} - (-E)t)}$$

$$\psi_2(-E, -\vec{p}) = \sqrt{\frac{|E|+m}{2|E|}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{(-p_x) - i(-p_y)}{(-E)+m} \\ \frac{-(-p_z)}{(-E)+m} \end{pmatrix} e^{i((-\vec{p}) \cdot \vec{r} - (-E)t)} = -\sqrt{\frac{|E|+m}{2|E|}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{p_x - ip_y}{E-m} \\ \frac{p_z}{E-m} \end{pmatrix} e^{-i(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)}$$

$$\psi_2(-E, -\vec{p}) \Rightarrow -\psi_3' \quad v_3(E, \vec{p}) = -u_2(-E, -\vec{p})$$

反物質粒子の波動関数（5）

陽電子の波動関数

$$\psi' = i\gamma^2 \psi^*$$

$$\gamma^2 = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_y \\ -\sigma_y & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

$$\psi_4' = i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \psi_4^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \psi_4^*$$

$$\psi_4' = \sqrt{\frac{|E|+m}{2|E|}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{p_x - ip_y}{E-m} \\ \frac{-p_z}{E-m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^* e^{-i(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)}$$

$$\psi_4' = \sqrt{\frac{|E|+m}{2|E|}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E-m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E-m} \end{pmatrix} e^{-i(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)} \quad \psi_1 = \sqrt{\frac{|E|+m}{2|E|}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E+m} \end{pmatrix} e^{i(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)}$$

ψ_2 の波動関数中の符号を反対にする

$$\psi_1(-E, -\vec{p}) = u_1(-E, -\vec{p}) e^{i((-\vec{p}) \cdot \vec{r} - (-E)t)}$$

$$\psi_1(-E, -\vec{p}) = \sqrt{\frac{|E|+m}{2|E|}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{(-p_z)}{(-E)+m} \\ \frac{(-p_x) + i(-p_y)}{(-E)+m} \end{pmatrix} e^{i((-\vec{p}) \cdot \vec{r} - (-E)t)} = \sqrt{\frac{|E|+m}{2|E|}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E-m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E-m} \end{pmatrix} e^{-i(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)}$$

$$\psi_1(-E, -\vec{p}) \Rightarrow \psi_4' \quad v_4(E, \vec{p}) = u_1(-E, -\vec{p})$$

Lagrangian of Dirac Equation

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$$

$$\left[\begin{array}{l} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \\ (\gamma^0)^2 = 1 \quad (\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = -1 \\ \gamma^{0\dagger} = \gamma^0 \\ \gamma^{1\dagger} = -\gamma^1 \quad \gamma^{2\dagger} = -\gamma^2 \quad \gamma^{3\dagger} = -\gamma^3 \end{array} \right]$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} = i\bar{\psi} \gamma^\mu \quad \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \right) = \partial_\mu (i\bar{\psi} \gamma^\mu)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = -m\bar{\psi} \quad \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0 \quad \text{なので}$$

$$\partial_\mu (i\bar{\psi} \gamma^\mu) + m\bar{\psi} = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$i\partial_\mu \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu + m \psi^\dagger \gamma^0 = 0$$

$$i\partial_\mu \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 + m \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 = 0$$

$$-i\partial_\mu \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \gamma^\mu + m \psi^\dagger = 0$$

$$-i\partial_\mu \psi^\dagger \gamma^\mu + m \psi^\dagger = 0 \quad \text{複素共役をとると}$$

$$i\gamma^{\dagger\mu} \partial_\mu \psi + m \psi = 0 \quad -i\gamma^\mu \partial_\mu \psi + m \psi = 0$$

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \psi = 0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\therefore (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0$$

補遺(1)

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n} \quad p = \frac{h}{\lambda} \quad \vec{p} = \frac{h}{\lambda} \vec{n}$$

$$\vec{p} = \frac{h}{2\pi} \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n} = \hbar k \vec{n} = \hbar \vec{k}$$

$$\vec{p} \cdot \vec{x} = \hbar \vec{k} \cdot \vec{x} \quad \vec{p} \cdot \vec{x} - Et = \hbar \vec{k} \cdot \vec{x} - Et$$

$$\frac{E}{\hbar k} = \frac{E}{\frac{h}{2\pi} \frac{2\pi}{\lambda}} = \frac{E}{h} \lambda = v\lambda = c$$

$$\vec{p} \cdot \vec{x} - Et = \hbar \vec{k} \cdot \vec{x} - Et = \hbar k \cdot x \cos\theta - Et = \hbar k \cdot r - Et = \hbar k \left(r - \frac{E}{\hbar k} t \right) = \hbar k (r - ct)$$

$$\vec{p} \cdot \vec{x} + Et = \hbar \vec{k} \cdot \vec{x} + Et = \hbar k \cdot x \cos\theta + Et = \hbar k \cdot r + Et = \hbar k \left(r + \frac{E}{\hbar k} t \right) = \hbar k (r - (-c)t)$$

