# 特殊相対性理論と量子力学との出会い

# 相対論的量子力学の展開

# Dirac 方程式からスピンの導出

# 陽電子の存在・解釈まで

## （素粒子物理学の出発点）

2022.9.7

（改定版）

鹿児島現代物理勉強会

御領　悟志

まえがき

高校生のとき物理の学習を進めるにつれ、「光速に近い高速で運動する物体については相対性理論（特殊相対性理論）を用いて論じなければ、運動を正確には記述できない」ことを知るようになった。すなわち、相対性理論に従いニュートン力学を修正した、相対論的力学でなければ正確に物体の運動を記述することが出来ないとの事である。

歴史的に見ると、２０世紀にはいる頃から「原子のような微少な世界で起こる現象についてはそれまでの物理理論では説明がつかずに，全く新しい物理学すなわち量子力学を用いなければならない」ことが次々に分かってきた。日本人では、その新しい物理学を最初に仁科芳雄博士が留学先のボーアの元で研究し、また当時大学生だった湯川秀樹博士においては国内で独学に近い形で量子力学を学んだことなど、「旅人」を読んで知ることになる。

「物理学の理論は、相対性理論と量子力学の２本の大きな柱で構成され、その二つを理解することがまずは欠かせない」と高校３年生の頃には自分なりに分かって来たのだが、更にブルーバックスなどの物理の啓蒙書を読み進むと相対性理論を量子力学にも適用しなければ、量子的な現象も正確には記述できないことも知るようになった。電子の様に極微の世界で高速に運動する粒子の現象を正確に記述するにはどうすればよいのか？すなわち、量子力学を相対性理論の枠組みの中で記述すると量子力学はどの様な式になるのか？ここまでは「お話」的にではあるが、高校生の私でも理解できたように思った（わかったような気がした）。天才物理学者「ディラック」の名前を知ったのも当然その頃である。結局その二つの理論を理解したいとの純粋な気持ちから、大学では物理学を専攻すると心に決め、大学受験をしたことを覚えている。

ディラックは、素粒子物理学の扉を開いて行った人である。高エネルギーの電子は、光速に近い運動をしているので、どうしても相対論的に取り扱う必要があり、またシュレディンガー方程式を相対論的に修正・発展させたディラック方程式を用いると、スピンという物理量が自動的に導き出された。更に波動関数の一つの解として得られる負のエネルギーをどのように解釈すればいいのか？真空においては負のエネルギーに電子が全て詰まっていて、パウリの排他律により電子は落ち込めず、逆にエネルギーを与えると負のエネルギー状態にいる電子が飛び出し、穴が開いた状態が正のエネルギーと正の電気を持つ陽電子として観測される「ディラックの海」の解釈にたどり着いた。電子の負のエネルギー解の波動関数を捨てることなく、その解に対応する二つの波動関数まで含めて、電子の状態を記述する波動関数が４成分からなる「スピノール」であり、また物質粒子には、電荷の符号のみが反対で他は全て同じ物理量の「反物質粒子・反粒子」があることも導かれた。この反粒子である陽電子もしばらくして発見されることになる。

後に理論的解釈は更に進み、「ディラックの海」を考える必要はなくなったが、物理学の新たな道を示し、その後多くの物理学者がその道を発展させ現在に至っている。そういう現代物理における金字塔の「ディラック方程式」を対称性という指導原理に基づき数学的に正確に理解して、発展・活用させる素地を築くことは物理教育的にはとても重要なことと思う。ディラック自身も、「自分が導いた方程式は。自分よりも賢かった」と言っている。

「お話」的に物理を理解することと、それを正確に数学的に理解することとは別物である。物理を習得するには、数学を想像以上に一生懸命に勉強しなければならないことを理解したのは大学に入学してからのことだ。物理を理解したいとの気持ちはあっても、数学的に敷居が高いことを思い知らされた。たぶん、そのように感じている物理を勉強し始めたばかりの学生諸氏は多いと思う。

この小冊子は、高校物理教師として長年高校生に物理を指導している経験を活かし、大学生はもとより、数学が得意で物理好きの高校生なら理解が出来る事を願って式の展開をなるだけ飛ばすことなく記述したつもりです。特殊相対性理論を量子力学に適応していく数学的な過程を、私自身が困難に感じた点にポイントを置きながら説明しています。物理の理解が「お話」に終わることのない様に、更に高度な現代物理学の礎として学習を進められることを願っている。

目　次



☆ここで使われる数学及び物理
微積分・ベクトル解析・行列・解析力学・量子力学などの知識を活用している。
それらを学習するのにもディラック方程式は良き教材になると思う。

## Ⅰ．特殊相対性理論

１９０５年にアインシュタインが時間と空間について全く新しい考え方を提唱した。次の二つがその基礎となる。

> いかなる慣性系においても<u>光速は不変</u>である。
> いかなる慣性系においても<u>物理法則は同等</u>に成り立つ。

まずはじめに、慣性系Ｓとその慣性系Ｓに対して等速度で移動する慣性系Ｓ’での物体の各座標
Ｓ系（ｃｔ、ｘ、ｙ、ｚ）とＳ’系（ｃｔ’、ｘ’、ｙ’、ｚ’）の間の関係式を求めることにする。

### （１）．ローレンツ変換の導出過程

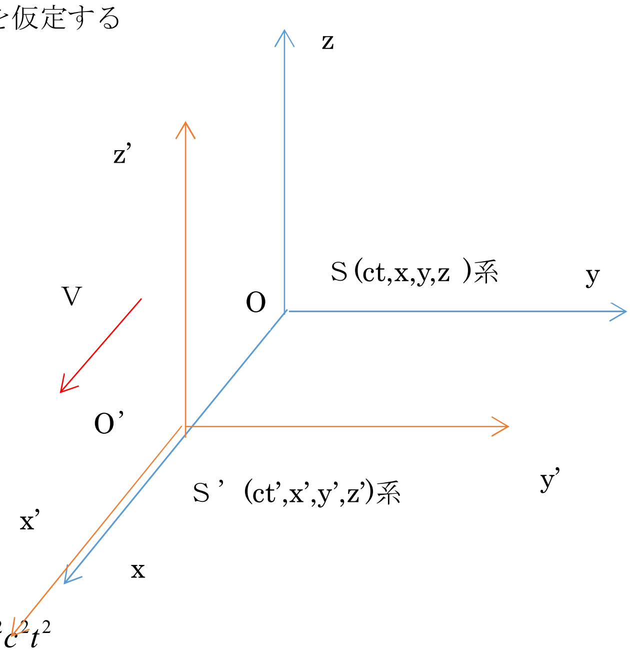
座標間の関係式は、一次式と考えられるので下記の式を仮定する

$x' = f(V)(x - Vt)$

$ct' = g(V)x + h(V)ct$

$y' = y$

$z' = z$




Ｏ とＯ’が重なっているとき光が発せられたとする。
光速不変の原理とどの慣性系でも物理法則は同等
に成立することから
Ｓ系（静止）とＳ’系（ｘ軸方向にで移動）において
それぞれの慣性系で光は同じ速さで同様に球形に
拡がって行くので次の式が成り立つ。

$$x^2 + y^2 + z^2 - ct^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - ct'^2 = 0 \cdots ①$$

$$= f^2(x - Vt)^2 + y^2 + z^2 - (gx + hct)^2$$
$$= f^2x^2 - 2f^2xVt + f^2V^2t^2 + y^2 + z^2 - g^2x^2 - 2ghxct - h^2c^2t^2$$

$$= (f^2 - g^2)x^2 - (2ghc + 2f^2V)xt + y^2 + z^2 + (f^2V^2 - h^2c^2)t^2 \quad \cdots ②$$

①と②の両辺が恒等式となることから

$f^2 - g^2 = 1 \cdots ③$　　　$\beta = \dfrac{V}{c}$ とおくと

$$2ghc + 2f^2V = 0 \quad ghc + f^2V = 0 \quad gh + f^2\frac{V}{c} = 0 \quad gh + f^2\beta = 0 \cdots ④$$

$$f^2V^2 - h^2c^2 = -c^2 \quad f^2\frac{V^2}{c^2} - h^2 = -1 \quad h^2 - f^2\beta^2 = 1 \cdots ⑤$$

④より　$gh = -f^2\beta$　の両辺を２乗すると　$g^2h^2 = f^4\beta^2$　$h^2 = \dfrac{\beta^2}{g^2}f^4 \cdots ⑥$

⑥を⑤に代入すると $\dfrac{\beta^2}{g^2}f^4 = 1 + f^2\beta^2$　$\dfrac{\beta^2}{f^2 - 1}f^4 = 1 + f^2\beta^2$　$\beta^2 f^4 = (1 + f^2\beta^2)(f^2 - 1)$

$$\beta^2 f^4 = f^2 - 1 + f^4\beta^2 - f^2\beta^2 \qquad 1 = f^2(1 - \beta^2) \qquad f^2 = \frac{1}{(1 - \beta^2)} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$ とおくと

$f^2=\gamma^2\cdots$⑦

③より $g^2=f^2-1=\gamma^2-1=\dfrac{1}{1-\beta^2}-1=\dfrac{1-(1-\beta^2)}{1-\beta^2}=\dfrac{\beta^2}{1-\beta^2}=\beta^2\gamma^2\cdots$⑧

⑥より　$h^2=\dfrac{\beta^2}{g^2}f^4=\dfrac{\beta^2}{\beta^2\gamma^2}\gamma^4=\gamma^2\cdots$⑨

$f^2=h^2=\gamma^2$　と　$g^2=\beta^2\gamma^2\cdots$⑩

$x\to\infty$　のとき $x'\to\infty$　$\therefore$　$f>0$　$f=\gamma\cdots$⑪

$t\to\infty$　のとき $t'\to\infty$　$\therefore$　$h>0$　$h=\gamma\cdots$⑪

④より　$gh+f^2\beta=0$　　$g\gamma+\gamma^2\beta=0$　　$g=-\gamma\beta\cdots$⑫

$$\boxed{\begin{aligned}&x'=\gamma(x-Vt)\\&ct'=-\gamma\beta x+\gamma ct=\gamma(-\beta x+ct)\\&y'=y\\&z'=z\end{aligned}}\cdots⑬$$

次のように整理する。

$$\begin{aligned}&ct'=-\gamma\beta x+\gamma ct=\gamma ct-\gamma\beta x\\&x'=\gamma\left(x-\frac{V}{c}ct\right)=\gamma(x-\beta ct)=-\gamma\beta ct+\gamma x\\&y'=y\\&z'=z\end{aligned}\cdots⑭$$

⑭を行列を用いて表すと

$$\begin{bmatrix}ct'\\x'\\y'\\z'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\gamma&-\gamma\beta&0&0\\-\gamma\beta&\gamma&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}ct\\x\\y\\z\end{bmatrix}\cdots⑮\qquad L=\begin{bmatrix}\gamma&-\gamma\beta&0&0\\-\gamma\beta&\gamma&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\cdots⑯$$

$\overrightarrow{X'}=\begin{bmatrix}ct'\\x'\\y'\\z'\end{bmatrix}$　　$\overrightarrow{X}=\begin{bmatrix}ct\\x\\y\\z\end{bmatrix}$　　$\overrightarrow{X'}=L\overrightarrow{X}$　を　ローレンツ変換　という。

## （２）．数学的な準備

### （Ａ）扱う式の定義

現代物理を習得する上で、現代物理特有の式表現の仕方・扱い方があります。なぜ、わざわざこんな面倒な表現をするのか、そのうち慣れてきます。**習うより慣れろです。**我慢して頑張りましょう。

$$x^\mu = \left(x^0 \quad x^1 \quad x^2 \quad x^3\right) \quad x^\mu = \left(ct \quad x \quad y \quad z\right) \qquad x^\mu = \left(ct \quad \mathbf{x}\right)$$

$$x_\mu = \left(x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3\right) \qquad = \left(x^0 \quad -x^1 \quad -x^2 \quad -x^3\right) \qquad = \left(ct \quad -x \quad -y \quad -z\right)$$

$$x_\mu = \left(ct \quad -\mathbf{x}\right)$$

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0} \quad \nabla\right) \qquad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x_0} \quad -\nabla\right)$$

$$\Lambda^\mu_\nu = \Lambda^\nu_\mu = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \beta = \frac{V}{c} \qquad d\tau = \sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}dt$$

Lorentz boost along x-axis　x 軸方向に運動する特殊な場合の変換式　$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad x'_\mu = \Lambda^\nu_\mu x_\nu$

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = diag\left(1 \quad -1 \quad -1 \quad -1\right)$$ 対角行列

$$a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu \quad a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu$$

（B）内積の定義とローレンツ不変量

ローレンツ変換に従うベクトルのことを四元ベクトルという。

内積の定義　→　４元ベクトル **a** と **b** の内積を次のように約束する。

$$a \cdot b = a^\mu b_\mu = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 = a^0 b^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_\mu b^\mu \cdots ①$$

四元ベクトル **a** と **b** のローレンツ変換後の内積をとる

$$\mathbf{a'} \cdot \mathbf{b'} = a'^\mu b'_\mu = a'^0 b'^0 - a'^1 b'^1 - a'^2 b'^2 - a'^3 b'^3$$

$$a' \cdot b' = a'^\mu b'_\mu = (\gamma a^0 - \beta\gamma a^1)(\gamma b^0 - \beta\gamma b^1) - (-\beta\gamma a^0 + \gamma a^1)(-\beta\gamma b^0 + \gamma b^1) - a^2 b^2 - a^3 b^3$$

$$= (\gamma a^0 - \beta\gamma a^1)(\gamma b^0 - \beta\gamma b^1) - (-\beta\gamma a^0 + \gamma a^1)(-\beta\gamma b^0 + \gamma b^1) - a^2 b^2 - a^3 b^3$$

$$= \gamma^2 a^0 b^0 - \gamma^2 \beta^2 a^0 b^0 + \beta^2 \gamma^2 a^1 b_1^1 - \gamma^2 a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3$$

$$= \gamma^2 (1-\beta^2) a^0 b^0 - \gamma^2 (1-\beta^2) a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3$$

$$= \frac{1}{(1-\beta^2)}(1-\beta^2) a^0 b^0 - \frac{1}{(1-\beta^2)}(1-\beta^2) a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3$$

$$= a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 = a^\mu b_\mu = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

∴四元ベクトル同士の内積は、ローレンツ変換について不変量になる。（ローレンツスカラー量）

$dx^\mu = \begin{bmatrix} cdt & dx & dy & dz \end{bmatrix}$ はローレンツ変換に従う四元ベクトルである。その内積をとると

$$dx^\mu dx_\mu = dx^\mu g_{\mu\nu} dx^\nu = \begin{bmatrix} cdt & dx & dy & dz \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cdt \\ dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

$ds^2 = dx^\mu dx_\mu$ と定義すると

$$ds^2 = dx^\mu dx_\mu = c^2dt^2 \left( 1 - \frac{\left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right]}{c^2} \right) = c^2dt^2 \left( 1 - \frac{\upsilon^2}{c^2} \right)$$ はローレンツスカラー量

$$d\tau^2 = \frac{ds^2}{c^2} = dt^2 \left( 1 - \frac{\upsilon^2}{c^2} \right) \quad d\tau = \frac{ds}{c} = \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}} dt \quad \cdots ② \quad \therefore \tau = \int_0^\tau d\tau = \int_0^t \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}} dt \cdots ③$$

ｄτは　ローレンツスカラー量となり、その積分量τを　固有時　という。

（３）特殊相対論的運動方程式（ニュートン力学の修正）　（四元速度・四元運動量・四元力）

ところで四元ベクトルにローレンツスカラーをかけたベクトルも四元ベクトルなので

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = \begin{bmatrix} \frac{cdt}{d\tau} & \frac{dx}{d\tau} & \frac{dy}{d\tau} & \frac{dz}{d\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{cdt}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}} dt} & \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}} dt} & \frac{dy}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}} dt} & \frac{dz}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}} dt} \end{bmatrix}$$

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = \begin{bmatrix} \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} \frac{dx}{dt} & \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} \frac{dy}{dt} & \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} \frac{dz}{dt} \end{bmatrix} \quad \rightarrow$$ 四元速度

更に静止質量$m_0$をかけると

$$p^\mu = m_0 \frac{dx^\mu}{d\tau} = \begin{bmatrix} \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} & \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} \frac{dx}{dt} & \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} \frac{dy}{dt} & \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} \frac{dz}{dt} \end{bmatrix} \quad \rightarrow$$ 四元運動量

更に四元運動量を固有時で微分する。　空間部分については　j=1,2,3

$\frac{d}{dt}\left(p^j\right) = F^j$　とおくと　　※ここからは $\beta = \frac{\upsilon}{c}$　とおいて計算を示す。

$$\frac{d}{d\tau}\left(p^j\right)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\left(p^j\right)=\frac{F^j}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}=f^j \quad \cdots ①$$ 四元力の空間部分

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)=m_0\frac{d}{dt}\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{\frac{-1}{2}}=-\frac{m_0}{2}\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{\frac{-3}{2}}\left(-\frac{2}{c^2}\upsilon_x\frac{d\upsilon_x}{dt}-\frac{2}{c^2}\upsilon_y\frac{d\upsilon_y}{dt}-\frac{2}{c^2}\upsilon_z\frac{d\upsilon_z}{dt}\right)$$

$$=\frac{m_0}{c^2}\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{\frac{-3}{2}}\left(\upsilon_x\frac{d\upsilon_x}{dt}+\upsilon_y\frac{d\upsilon_y}{dt}+\upsilon_z\frac{d\upsilon_z}{dt}\right)=\frac{m_0}{c^2}\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{\frac{-3}{2}}\vec{\upsilon}\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\cdots ②$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)=m_0\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{\frac{-3}{2}}\vec{\upsilon}\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\frac{m_0}{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\vec{\upsilon}\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\cdots ③$$

ニュートンの運動方程式は、運動量の時間変化率が力に相当するので $\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\vec{\upsilon}\right)=\vec{F}\cdots ④$

力と速度の積が仕事率 $\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\vec{\upsilon}\right)=\vec{\upsilon}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)\cdot\vec{\upsilon}+\vec{\upsilon}\cdot\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\cdots ⑤$

$$\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}\cdot\frac{m_0}{c^2\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\vec{\upsilon}\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\cdot\vec{\upsilon}+\vec{\upsilon}\cdot\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\cdots ⑥$$

$$\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}=\frac{m_0}{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{\upsilon^2}{c^2}\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\cdot\vec{\upsilon}+\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\vec{\upsilon}\cdot\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$$

$$\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\frac{1}{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)}\frac{\upsilon^2}{c^2}\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\cdot\vec{\upsilon}+\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\vec{\upsilon}\cdot\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$$

$$\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\left(\frac{\frac{\upsilon^2}{c^2}}{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)}+1\right)\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\cdot\vec{\upsilon}\cdots⑦$$

$$\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\left(\frac{\frac{\upsilon^2}{c^2}}{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)}+\frac{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)}\right)\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\cdot\vec{\upsilon}\qquad \vec{F}\cdot\vec{\upsilon}=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)}\right)\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\cdot\vec{\upsilon}$$

$$\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}=\frac{m_0}{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\cdot\vec{\upsilon}\cdots⑨$$ ③と⑨より $\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)=\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}\cdots$⑩<u>左辺はエネルギー変化率</u>

固有時で微分する形式に書き換えると

$$\frac{\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)=\frac{d}{d\tau}\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)\qquad \frac{\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}}{c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}=\frac{d}{d\tau}\left(\frac{m_0c}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)$$

$$\therefore\quad \frac{d}{d\tau}\left(\frac{m_0c}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)=\frac{\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}}{c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\cdots⑪$$

ここで、⑩の右辺は仕事率なので、左辺はエネルギーの変化率と考えられる。

$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$ を用いると $E=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}=mc^2$ ⑩より $\frac{dE}{dt}=\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}$ $p^0=\frac{m_0c}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}=mc=\frac{E}{c}$

四元運動量の時間部分の固有時による微分は⑪より $\frac{d}{d\tau}\left(\frac{m_0c}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)=\frac{d}{d\tau}\left(\frac{E}{c}\right)=\frac{d}{d\tau}\left(P^0\right)=f^0\cdots$⑫

ここで⑫より $f^0=\frac{\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}}{c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$ → 四元力の時間部分 $\vec{f}=\frac{\vec{F}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$ → 四元力の空間部分

改めて四元運動量から整理すると

$$p^{\mu}=m_0\frac{dx^{\mu}}{d\tau}=\begin{bmatrix}\dfrac{m_0 c}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}} & \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}\dfrac{dx}{dt} & \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}\dfrac{dy}{dt} & \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}\dfrac{dz}{dt}\end{bmatrix}$$

$$p_x=\frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}\frac{dx}{dt}\quad p_y=\frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}\frac{dy}{dt}\quad p_z=\frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}\frac{dz}{dt}\quad m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}$$ の関係式より

$$p_x=m\frac{dx}{dt}\quad p_y=m\frac{dy}{dt}\quad p_z=m\frac{dz}{dt}\cdots⑬$$

$$p^{\mu}=m_0\frac{dx^{\mu}}{d\tau}=\begin{bmatrix}\dfrac{E}{c} & m\dfrac{dx}{dt} & m\dfrac{dy}{dt} & m\dfrac{dz}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{E}{c} & p_x & p_y & p_z\end{bmatrix}\cdots⑭$$ と書ける。

$$p^{\mu}=\begin{bmatrix}\dfrac{E}{c} & p_x & p_y & p_z\end{bmatrix}\cdots⑮$$ 四元運動量

$$f^{\mu}=\begin{bmatrix}\dfrac{\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}}{c\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}} & \dfrac{F_x}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}} & \dfrac{F_y}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}} & \dfrac{F_z}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}\end{bmatrix}_z$$ 四元力 $$f^{\mu}=\begin{bmatrix}\dfrac{\vec{f}\cdot\vec{\upsilon}}{c} & \vec{f}\end{bmatrix}\cdots⑯$$ 別表記

## 相対論的運動方程式

$$\frac{d}{d\tau}\left(p^{\mu}\right)=f^{\mu}\cdots⑰$$ 固有時による微分 → $$\frac{d}{d\tau}=\frac{dt}{d\tau}\frac{d}{dt}=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}$$

4 元運動量（4-momentum） $p^{\mu}=\begin{pmatrix}\dfrac{E}{c} & \mathbf{p}\end{pmatrix}$ $p_{\mu}=\begin{pmatrix}\dfrac{E}{c} & -\mathbf{p}\end{pmatrix}$

不変量質量（Invariant mass） $p^{\mu}p_{\mu}=p_{\mu}p^{\mu}=\dfrac{E^2}{c^2}-\mathbf{p}^2=m^2c^2$ $\dfrac{E^2}{c^2}=m^2c^2+\mathbf{p}^2$

$$E^2=m^2c^4+\mathbf{p}^2c^2\qquad E=\sqrt{m^2c^4+\mathbf{p}^2c^2}$$

$\therefore$ $m=0$ ならば $E=c|\mathbf{p}|$ $|\mathbf{P}|=\dfrac{E}{c}$

（５）行列を用いたローレンツスカラーの扱い方

$$a' = La \qquad a' \cdot b' = (a')^t G(b') = (La)^t G(Lb) = a^t L^t GLb = a^t (L^t GL)b \cdots ①$$
$$b' = Lb$$

$$L^t GL = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 & -\beta\gamma^2 + \beta\gamma^2 & 0 & 0 \\ -\beta\gamma^2 + \beta\gamma^2 & \beta^2\gamma^2 - \gamma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 & -\beta\gamma^2 + \beta\gamma^2 & 0 & 0 \\ -\beta\gamma^2 + \beta\gamma^2 & \beta^2\gamma^2 - \gamma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma^2(1-\beta^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma^2(1-\beta^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$L^t GL = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = G \quad \cdots ② \qquad a^t (L^t GL)b = a^t Gb = a \cdot b \quad \Rightarrow \quad a' \cdot b' = a \cdot b \cdots ③$$

## Ⅱ．量子力学

量子力学の基礎となるシュレディンガー方程式は次の通りになる。

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = (-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U)\psi \cdot\cdot ① \qquad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

この式は、非相対論的なエネルギー保存則を

$$E = \frac{1}{2} m\vec{v}^2 + U(\vec{r}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + U(\vec{r}) \cdot\cdot ②$$

$E = i\hbar \dfrac{\partial}{\partial t} \qquad \vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$ 　と置き換えれば得られる式である。

この式の左辺は時間についての一階の微分を含み右辺では空間的に二階の微分を含む微分方程式である。①の式をローレンツ変換で書き換えると、同じ形の方程式にはならないことは容易に察しがつくかと思う。

## Ⅲ．ディラック方程式の導出過程

### （１）導出までの式の展開

４元運動量ベクトル

$$\begin{bmatrix} p^0 & p^1 & p^2 & p^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{c} & p_x & p_y & p_z \end{bmatrix} \quad \cdots\cdot ①$$

は、ローレンツ変換に従う物理量である。

４元運動量ベクトルの内積は、ローレンツスカラー量であるので

$$p^\mu p_\mu = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = \text{一定} \quad \cdots\cdot ②$$ となる。

更に粒子に固定された座標系では $\begin{bmatrix} p^0 & p^1 & p^2 & p^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{mc^2}{c} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ なので

地上座標系と粒子に固定された運動座標系からそれぞれ見たときのローレンツスカラー量は

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = (mc)^2 \quad \cdots\cdot ③$$ となる。

$$\therefore \quad E^2 = c^2 p_x^2 + c^2 p_y^2 + c^2 p_z^2 + m^2 c^4$$ 従って

$$E = c\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + (mc)^2} \quad \cdots\cdot ④$$ と書ける。

④が下記のように一次線形であると仮定する。

$$E = c\alpha_x p_x + c\alpha_y p_y + c\alpha_z p_z + \beta mc^2 \quad \cdots\cdot ⑤$$ 行列を用いると③の関係を満たすとの発想がすごい

⑤を両辺を二乗すると

$$E^2 = c^2 \alpha_x{}^2 p_x{}^2 + c^2 \alpha_y{}^2 p_y{}^2 + c^2 \alpha_z{}^2 p_z{}^2 + \beta^2 m^2 c^4$$

$$+ c^2 \alpha_x \alpha_y p_x p_y + c^2 \alpha_x \alpha_z p_x p_z + c^2 \alpha_y \alpha_x p_y p_x + c^2 \alpha_y \alpha_z p_y p_z + c^2 \alpha_z \alpha_x p_z p_x + c^2 \alpha_z \alpha_y p_z p_y$$

$$+ c\alpha_x p_x \beta mc^2 + c\alpha_y p_y \beta mc^2 + c\alpha_z p_z \beta mc^2 + \beta mc^3 \alpha_x p_x + \beta mc^3 \alpha_y p_y + \beta mc^3 \alpha_z p_z$$

$\cdots\cdot ⑥$

$$= c^2 \underbrace{\alpha_x{}^2}_{1} p_x{}^2 + c^2 \underbrace{\alpha_y{}^2}_{1} p_y{}^2 + c^2 \underbrace{\alpha_z{}^2}_{1} p_z{}^2 + \underbrace{\beta^2}_{1} m^2 c^4$$

$$+ c^2 (\underbrace{\alpha_x \alpha_y + \alpha_y \alpha_x}_{0}) p_x p_y + c^2 (\underbrace{\alpha_y \alpha_z + \alpha_z \alpha_y}_{0}) p_y p_z + c^2 (\underbrace{\alpha_z \alpha_x + \alpha_x \alpha_z}_{0}) p_z p_x$$

$$+ mc^3 (\underbrace{\alpha_x \beta + \beta \alpha_x}_{0}) p_x + mc^3 (\underbrace{\alpha_y \beta + \beta \alpha_y}_{0}) p_y + mc^3 (\underbrace{\alpha_z \beta + \beta \alpha_z}_{0}) p_z \cdots\cdot ⑦$$

上式が示す通り以下の条件が成立するならば

$$\alpha_x{}^2=1,\alpha_y{}^2=1,\alpha_z{}^2=1,\beta^2=1\cdots\cdot⑧$$

$$\alpha_x\alpha_y+\alpha_y\alpha_x=0,\ \alpha_y\alpha_z+\alpha_z\alpha_y=0,\ \alpha_z\alpha_x+\alpha_x\alpha_z=0\cdots\cdot⑨$$

$$\alpha_x\beta+\beta\alpha_x=0,\alpha_y\beta+\beta\alpha_y=0,\alpha_z\beta+\beta\alpha_z=0\cdots\cdot⑩$$

$$E^2=c^2p_x{}^2+c^2p_y{}^2+c^2p_z{}^2+m^2c^4\cdots\cdot⑪$$

⑤の方程式は、ローレンツスカラーの条件を満たすことになる。
更に⑤式を量子化すると次の通りになる。

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}=-i\hbar c(\alpha_x\frac{\partial}{\partial x}+\alpha_y\frac{\partial}{\partial y}+\alpha_z\frac{\partial}{\partial z})+\beta mc^2 \quad \rightarrow \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi=\left(-i\hbar c(\alpha_x\frac{\partial}{\partial x}+\alpha_y\frac{\partial}{\partial y}+\alpha_z\frac{\partial}{\partial z})+\beta mc^2\right)\psi$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi=\left(-i\hbar c\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}+\beta mc^2\right)\psi\cdots\cdot⑫$$

両辺に左辺から $\beta$ をかけると

$$i\hbar\beta\frac{\partial}{\partial t}+i\hbar c\beta\alpha_x\frac{\partial}{\partial x}+i\hbar c\beta\alpha_y\frac{\partial}{\partial y}+i\hbar c\beta\alpha_z\frac{\partial}{\partial z}-\beta^2mc^2=0$$

$$\left(i\hbar\beta\frac{\partial}{\partial ct}+i\hbar\beta\alpha_x\frac{\partial}{\partial x}+i\hbar\beta\alpha_y\frac{\partial}{\partial y}+i\hbar\beta\alpha_z\frac{\partial}{\partial z}-mc\right)\psi=0$$

$\gamma^0=\beta,\gamma^1=\beta\alpha_x,\gamma^2=\beta\alpha_y,\gamma^3=\beta\alpha_z$ とおけば

$$\left(i\hbar\gamma^0\frac{\partial}{\partial ct}+i\hbar\gamma^1\frac{\partial}{\partial x}+i\hbar\gamma^2\frac{\partial}{\partial y}+i\hbar\gamma^3\frac{\partial}{\partial z}-mc\right)\psi=0$$

$$\left(i\hbar\gamma^0\frac{\partial}{\partial x^0}+i\hbar\gamma^1\frac{\partial}{\partial x^1}+i\hbar\gamma^2\frac{\partial}{\partial x^2}+i\hbar\gamma^3\frac{\partial}{\partial x^3}-mc\right)\psi=0 \Rightarrow \boxed{\left(\sum_0^3 i\hbar\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}-mc\right)\psi=0}$$

同じ文字が繰り返すときは、それについて和をとる。アインシュタインの縮約 $\left(i\hbar\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}-mc\right)\psi=0$

**ディラック方程式（Dirac equation）**

$$\left(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu-mc\right)\psi=0 \qquad \cdots\cdot⑬$$

（２）ディラック方程式中の各行列の性質　※ディラック方程式中に出てくる物理量

①パウリ行列（2 行 2 列）　→　スピンを表現するのに使われる

$$\sigma_x=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\ \sigma_y=\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix}\ \sigma_z=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\ I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

②パウリ行列を用いた行列αとβの定義（４行４列）

$$\alpha_x = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{bmatrix} \alpha_y = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{bmatrix} \alpha_z = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{bmatrix} \beta = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$$

③パウリ行列（2 行２列）のもつ関係式

$$\sigma_x{}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad \sigma_y{}^2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$\sigma_z{}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$\sigma_x\sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \qquad \sigma_y\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

$$\sigma_z\sigma_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_y\sigma_z = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_z\sigma_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \sigma_x\sigma_z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x = 0 \qquad \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_x = 2i\sigma_z$$

$$\sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_y = 0 \qquad \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_y = 2i\sigma_x$$

$$\sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_z = 0 \qquad \sigma_z\sigma_x - \sigma_x\sigma_z = 2i\sigma_y$$

$$\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij} \qquad \vec{\sigma}\times\vec{\sigma} = 2i\vec{\sigma} \quad \cdots⑭$$

④α、β行列の関係式の確認

$$\alpha_x\alpha_y + \alpha_y\alpha_z = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\alpha_y\alpha_z + \alpha_z\alpha_y = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_y & 0 \\ 0 & \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\alpha_z\alpha_x + \alpha_x\alpha_z = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\alpha_x\beta = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{bmatrix} \beta\alpha_x = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_x \\ -\sigma_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_y\beta = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{bmatrix} \beta\alpha_y = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_y \\ -\sigma_y & 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_z\beta=\begin{bmatrix}0&\sigma_z\\\sigma_z&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I&0\\0&-I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-\sigma_z\\\sigma_z&0\end{bmatrix}\quad\beta\alpha_z=\begin{bmatrix}I&0\\0&-I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&\sigma_z\\\sigma_z&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\sigma_z\\-\sigma_z&0\end{bmatrix}$$

$$\alpha_x\beta+\beta\alpha_x=0\qquad\alpha_y\beta+\beta\alpha_y=0\qquad\alpha_z\beta+\beta\alpha_z=0$$

$$\beta^2=\begin{bmatrix}I&0\\0&-I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I&0\\0&-I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I&0\\0&I\end{bmatrix}=\mathrm{I}$$

$$\alpha_x{}^2=\begin{bmatrix}0&\sigma_x\\\sigma_x&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&\sigma_x\\\sigma_x&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_x{}^2&0\\0&\sigma_x{}^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I&0\\0&I\end{bmatrix}=\mathrm{I}$$

$$\alpha_y{}^2=\begin{bmatrix}0&\sigma_y\\\sigma_y&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&\sigma_y\\\sigma_y&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_y{}^2&0\\0&\sigma_y{}^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I&0\\0&I\end{bmatrix}=\mathrm{I}$$

$$\alpha_z{}^2=\begin{bmatrix}0&\sigma_z\\\sigma_z&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&\sigma_z\\\sigma_z&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_z{}^2&0\\0&\sigma_z{}^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I&0\\0&I\end{bmatrix}=\mathrm{I}$$

### ⑤γ行列の定義と関係式

$$\gamma^0=\beta=\begin{bmatrix}I&0\\0&-I\end{bmatrix}$$

$$\gamma^1=\beta\alpha_x=\begin{bmatrix}I&0\\0&-I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&\sigma_x\\\sigma_x&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\sigma_x\\-\sigma_x&0\end{bmatrix}$$

$$\gamma^2=\beta\alpha_y=\begin{bmatrix}I&0\\0&-I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&\sigma_y\\\sigma_y&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\sigma_y\\-\sigma_y&0\end{bmatrix}$$

$$\gamma^3=\beta\alpha_z=\begin{bmatrix}I&0\\0&-I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&\sigma_z\\\sigma_z&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\sigma_z\\-\sigma_z&0\end{bmatrix}$$

ゆえに一般的な表現として　x, y, z をそれぞれ　k = 1, 2, 3 と表すと

$$\gamma^k=\beta\alpha_k=\begin{bmatrix}I&0\\0&-I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&\sigma_k\\\sigma_k&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\sigma_k\\-\sigma_k&0\end{bmatrix}$$

$$(\gamma^0)^2=\beta^2=\mathrm{I}$$

$$(\gamma^1)^2=\beta\alpha_x\beta\alpha_x=-\alpha_x\beta\beta\alpha_x=-\alpha_x\beta^2\alpha_x=-\alpha_x\mathrm{I}\alpha_x=-\alpha_x{}^2=-\mathrm{I}$$

$$(\gamma^2)^2=\beta\alpha_y\beta\alpha_y=-\alpha_y\beta\beta\alpha_y=-\alpha_y\beta^2\alpha_y=-\alpha_y\mathrm{I}\alpha_y=-\alpha_y{}^2=-\mathrm{I}$$

$$(\gamma^3)^2=\beta\alpha_z\beta\alpha_z=-\alpha_z\beta\beta\alpha_z=-\alpha_z\beta^2\alpha_z=-\alpha_z\mathrm{I}\alpha_z=-\alpha_z{}^2=-\mathrm{I}$$

$$\gamma^0\gamma^j+\gamma^j\gamma^0=\beta\beta\alpha_j+\beta\alpha_j\beta=\beta\beta\alpha_j-\alpha_j\beta\beta=\alpha_j-\alpha_j=0$$

$i \neq j$ のときは

$$\gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i = \beta\alpha_i\beta\alpha_j + \beta\alpha_j\beta\alpha_i = -\alpha_i\beta\beta\alpha_j - \alpha_j\beta\beta\alpha_i = -\alpha_i\alpha_j - \alpha_j\alpha_i = -(\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i) = 0$$

したがって一般的な表現として

$$\{\gamma^\mu,\ \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad \cdots ⑮$$

ここで

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

## Ⅳ．スピンの導出過程

ディラック方程式における相対論的ハミルトニアンHは、自由粒子の場合　U＝０なので

$$H = \left( -i\hbar c(\alpha_x \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_y \frac{\partial}{\partial y} + \alpha_z \frac{\partial}{\partial z}) + \beta mc^2 \right) \cdots ①$$

電子の軌道角運動量　$\vec{L}$　の各成分

$$l_x = -i\hbar(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}) \qquad l_y = -i\hbar(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}) \qquad l_z = -i\hbar(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x})$$

相対論的ハミルトニアンとの交換関係を求めると

$$[H, l_x] = Hl_x - l_xH$$

$$= \left( -i\hbar c(\alpha_x \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_y \frac{\partial}{\partial y} + \alpha_z \frac{\partial}{\partial z}) + \beta mc^2 \right)\left( -i\hbar(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}) \right)$$

$$- \left( -i\hbar(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}) \right)\left( -i\hbar c(\alpha_x \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_y \frac{\partial}{\partial y} + \alpha_z \frac{\partial}{\partial z}) + \beta mc^2 \right)$$

$$(-i\hbar)^2 c\alpha_x \frac{\partial}{\partial x}(y\frac{\partial}{\partial z}) + (-i\hbar)^2 c\alpha_x \frac{\partial}{\partial x}(-z\frac{\partial}{\partial y}) = (-i\hbar)^2 c\alpha_x\{y\frac{\partial^2}{\partial x\partial z} - z\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\}$$

$$(-i\hbar)^2 c\alpha_y \frac{\partial}{\partial y}(y\frac{\partial}{\partial z}) + (-i\hbar)^2 c\alpha_y \frac{\partial}{\partial y}(-z\frac{\partial}{\partial y}) = (-i\hbar)^2 c\alpha_y\{\frac{\partial}{\partial z} + y\frac{\partial^2}{\partial y\partial z} - z\frac{\partial^2}{\partial y^2}\}$$

$$(-i\hbar)^2 c\alpha_z \frac{\partial}{\partial z}(y\frac{\partial}{\partial z}) + (-i\hbar)^2 c\alpha_z \frac{\partial}{\partial z}(-z\frac{\partial}{\partial y}) = (-i\hbar)^2 c\alpha_z\{y\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial y} - z\frac{\partial^2}{\partial z\partial y}\}$$

$$-i\hbar(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y})(-i\hbar c\alpha_x\frac{\partial}{\partial x})=(-i\hbar)^2c\alpha_x\{y\frac{\partial^2}{\partial z\partial x}-z\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\}$$

$$-i\hbar(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y})(-i\hbar c\alpha_y\frac{\partial}{\partial y})=(-i\hbar)^2c\alpha_y\{y\frac{\partial^2}{\partial z\partial y}-z\frac{\partial^2}{\partial y^2}\}$$

$$-i\hbar(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y})(-i\hbar c\alpha_z\frac{\partial}{\partial z})=(-i\hbar)^2c\alpha_z\{y\frac{\partial^2}{\partial z^2}-z\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\}$$

$$=(-i\hbar)^2c\{\alpha_y\frac{\partial}{\partial z}-\alpha_z\frac{\partial}{\partial y}\}=-\hbar^2c\{\alpha_y\frac{\partial}{\partial z}-\alpha_z\frac{\partial}{\partial y}\}$$

$$[H,l_x]=-\hbar^2c\{\alpha_y\frac{\partial}{\partial z}-\alpha_z\frac{\partial}{\partial y}\}\cdots②$$

∴　同様にして

$$[H,l_x]=-\hbar^2c\{\alpha_y\frac{\partial}{\partial z}-\alpha_z\frac{\partial}{\partial y}\}\quad [H,l_y]=-\hbar^2c\{\alpha_z\frac{\partial}{\partial x}-\alpha_x\frac{\partial}{\partial z}\}\quad [H,l_z]=-\hbar^2c\{\alpha_x\frac{\partial}{\partial y}-\alpha_y\frac{\partial}{\partial x}\}$$

ここで次の物理量を導入する。（シグマ行列とここでは称する）

$$\Sigma_x=\begin{bmatrix}\sigma_x & 0\\ 0 & \sigma_x\end{bmatrix}\quad \Sigma_y=\begin{bmatrix}\sigma_y & 0\\ 0 & \sigma_y\end{bmatrix}\quad \Sigma_z=\begin{bmatrix}\sigma_z & 0\\ 0 & \sigma_z\end{bmatrix}\cdots③$$

★シグマ行列のα、β行列との交換関係を調べると以下の通りになる。

$$[\alpha_x,\Sigma_x]=\begin{bmatrix}0 & \sigma_x\\ \sigma_x & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_x & 0\\ 0 & \sigma_x\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\sigma_x & 0\\ 0 & \sigma_x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \sigma_x\\ \sigma_x & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & {\sigma_x}^2-{\sigma_x}^2\\ {\sigma_x}^2-{\sigma_x}^2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\cdots④$$

$$[\alpha_x,\Sigma_y]=\begin{bmatrix}0 & \sigma_x\\ \sigma_x & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_y & 0\\ 0 & \sigma_y\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\sigma_y & 0\\ 0 & \sigma_y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \sigma_x\\ \sigma_x & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & \sigma_x\sigma_y-\sigma_y\sigma_x\\ \sigma_x\sigma_y-\sigma_y\sigma_x & 0\;{}_{y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2i\sigma_z\\ 2i\sigma_z & 0\end{bmatrix}=2i\begin{bmatrix}0 & \sigma_z\\ \sigma_z & 0\end{bmatrix}=2i\alpha_z\cdots⑤$$

$$[\alpha_x,\Sigma_z]=\begin{bmatrix}0 & \sigma_x\\ \sigma_x & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_z & 0\\ 0 & \sigma_z\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\sigma_z & 0\\ 0 & \sigma_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \sigma_x\\ \sigma_x & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & \sigma_x\sigma_z-\sigma_z\sigma_x\\ \sigma_x\sigma_z-\sigma_z\sigma_x & 0\;{}_{y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -2i\sigma_y\\ -2i\sigma_y & 0\end{bmatrix}=-2i\begin{bmatrix}0 & \sigma_y\\ \sigma_y & 0\end{bmatrix}=-2i\alpha_y\cdots⑥$$

$$[\alpha_y,\Sigma_x]=\begin{bmatrix}0 & \sigma_y\\ \sigma_y & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_x & 0\\ 0 & \sigma_x\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\sigma_x & 0\\ 0 & \sigma_x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \sigma_y\\ \sigma_y & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & \sigma_y\sigma_x-\sigma_x\sigma_y\\ \sigma_y\sigma_x-\sigma_x\sigma_y & 0 \quad {}_{y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -2i\sigma_z\\ -2i\sigma_z & 0\end{bmatrix}=-2i\begin{bmatrix}0 & \sigma_z\\ \sigma_z & 0\end{bmatrix}=-2i\alpha_z \quad \cdots ⑦$$

$$[\alpha_y,\Sigma_y]=\begin{bmatrix}0 & \sigma_y\\ \sigma_y & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_y & 0\\ 0 & \sigma_y\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\sigma_y & 0\\ 0 & \sigma_y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \sigma_y\\ \sigma_y & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & {\sigma_y}^2-{\sigma_y}^2\\ {\sigma_y}^2-{\sigma_y}^2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\cdots ⑧$$

$$[\alpha_y,\Sigma_z]=\begin{bmatrix}0 & \sigma_y\\ \sigma_y & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_z & 0\\ 0 & \sigma_z\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\sigma_z & 0\\ 0 & \sigma_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \sigma_y\\ \sigma_y & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & \sigma_y\sigma_z-\sigma_z\sigma_y\\ \sigma_y\sigma_z-\sigma_z\sigma_y & 0 \quad {}_{y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2i\sigma_x\\ 2i\sigma_x & 0\end{bmatrix}=2i\begin{bmatrix}0 & \sigma_x\\ \sigma_x & 0\end{bmatrix}=2i\alpha_x \quad \cdots ⑨$$

$$[\alpha_z,\Sigma_x]=\begin{bmatrix}0 & \sigma_z\\ \sigma_z & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_x & 0\\ 0 & \sigma_x\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\sigma_x & 0\\ 0 & \sigma_x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \sigma_z\\ \sigma_z & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & \sigma_z\sigma_x-\sigma_x\sigma_z\\ \sigma_z\sigma_x-\sigma_x\sigma_z & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2i\sigma_y\\ 2i\sigma_y & 0\end{bmatrix}=2i\alpha_y \quad \cdots ⑩$$

$$[\alpha_z,\Sigma_y]=\begin{bmatrix}0 & \sigma_z\\ \sigma_z & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_y & 0\\ 0 & \sigma_y\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\sigma_y & 0\\ 0 & \sigma_y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \sigma_z\\ \sigma_z & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & \sigma_z\sigma_y-\sigma_y\sigma_z\\ \sigma_z\sigma_y-\sigma_y\sigma_z & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -2i\sigma_x\\ -2i\sigma_x & 0\end{bmatrix}=-2i\begin{bmatrix}0 & \sigma_x\\ \sigma_x & 0\end{bmatrix}=-2i\alpha_x \quad \cdots ⑪$$

$$[\alpha_z,\Sigma_z]=\begin{bmatrix}0 & \sigma_z\\ \sigma_z & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_z & 0\\ 0 & \sigma_z\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\sigma_z & 0\\ 0 & \sigma_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \sigma_z\\ \sigma_z & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & {\sigma_z}^2-{\sigma_z}^2\\ {\sigma_z}^2-{\sigma_z}^2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\cdots ⑫$$

$$[\beta,\Sigma_x]=\begin{bmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_x & 0\\ 0 & \sigma_x\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\sigma_x & 0\\ 0 & \sigma_x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_x-\sigma_x & 0\\ 0 & -\sigma_x+\sigma_x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\cdots ⑬$$

$$[\beta,\Sigma_y]=\begin{bmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_y & 0\\ 0 & \sigma_y\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\sigma_y & 0\\ 0 & \sigma_y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_y-\sigma_y & 0\\ 0 & -\sigma_y+\sigma_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\cdots ⑭$$

$$[\beta,\Sigma_z]=\begin{bmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_z & 0\\ 0 & \sigma_z\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\sigma_z & 0\\ 0 & \sigma_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_z-\sigma_z & 0\\ 0 & -\sigma_z+\sigma_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\cdots ⑮$$

相対論的ハミルトニアンとシグマ行列との交換関係を調べると

$$[H,\Sigma_x]=\left(-i\hbar c(\alpha_x\frac{\partial}{\partial x}+\alpha_y\frac{\partial}{\partial y}+\alpha_z\frac{\partial}{\partial z})+\beta mc^2\right)(\Sigma_x)$$

$$-(\Sigma_x)\left(-i\hbar c(\alpha_x\frac{\partial}{\partial x}+\alpha_y\frac{\partial}{\partial y}+\alpha_z\frac{\partial}{\partial z})+\beta mc^2\right)$$

$$=-i\hbar c(\alpha_x\Sigma_x\frac{\partial}{\partial x}+\alpha_y\Sigma_x\frac{\partial}{\partial y}+\alpha_z\Sigma_x\frac{\partial}{\partial z})+mc^2\beta\Sigma_x$$

$$-\left(-i\hbar c(\alpha_x\Sigma_x\frac{\partial}{\partial x}+\alpha_y\Sigma_x\frac{\partial}{\partial y}+\alpha_z\Sigma_x\frac{\partial}{\partial z})+mc^2\beta\Sigma_x\right)$$

$$=-i\hbar c(\{\alpha_x\Sigma_x-\Sigma_x\alpha_x\}\frac{\partial}{\partial x}+\{\alpha_y\Sigma_x-\Sigma_x\alpha_y\}\frac{\partial}{\partial y}+\{\alpha_z\Sigma_x-\Sigma_x\alpha_z\}\frac{\partial}{\partial z})+mc^2\{\beta\Sigma_x-\Sigma_x\beta\}$$

$$=-i\hbar c([\alpha_x,\Sigma_x]\frac{\partial}{\partial x}+[\alpha_y,\Sigma_x]\frac{\partial}{\partial y}+[\alpha_z,\Sigma_x]\frac{\partial}{\partial z})+mc^2[\beta,\Sigma_x]\cdots ⑯$$

$$[H,\Sigma_x]=-i\hbar c(-2i\alpha_z\frac{\partial}{\partial y}+2i\alpha_y\frac{\partial}{\partial z})=2\hbar c(\alpha_y\frac{\partial}{\partial z}-\alpha_z\frac{\partial}{\partial y})\cdots\cdots ⑰$$

同様にして

$$[H,\Sigma_x]=2\hbar c(\alpha_y\frac{\partial}{\partial z}-\alpha_z\frac{\partial}{\partial y})$$

$$[H,\Sigma_y]=2\hbar c(\alpha_z\frac{\partial}{\partial x}-\alpha_z\frac{\partial}{\partial x})$$

$$[H,\Sigma_z]=2\hbar c(\alpha_x\frac{\partial}{\partial y}-\alpha_y\frac{\partial}{\partial x})$$

$$[H,\frac{1}{2}\hbar\Sigma_x]=\hbar^2 c(\alpha_y\frac{\partial}{\partial z}-\alpha_z\frac{\partial}{\partial y})\qquad [H,l_x]=-\hbar^2 c\{\alpha_y\frac{\partial}{\partial z}-\alpha_z\frac{\partial}{\partial y}\}$$

$$[H,l_x+\frac{1}{2}\hbar\Sigma_x]=0\cdots ⑱$$

同様にして、全角運動量の各成分の交換関係は次の通りになる。

$$[H,l_x+\frac{1}{2}\hbar\Sigma_x]=0\qquad [H,l_y+\frac{1}{2}\hbar\Sigma_y]=0\qquad [H,l_z+\frac{1}{2}\hbar\Sigma_z]=0$$

$$s_x=\frac{1}{2}\hbar\Sigma_x,s_y=\frac{1}{2}\hbar\Sigma_y,s_z=\frac{1}{2}\hbar\Sigma_z\qquad \text{i=1,2,3}\qquad s_k=\frac{1}{2}\hbar\begin{bmatrix}\sigma_k & 0\\ 0 & \sigma_k\end{bmatrix}$$

$$[H,l_x+s_x]=0\qquad [H,l_y+s_y]=0\qquad [H,l_z+s_z]=0\cdots ⑲$$

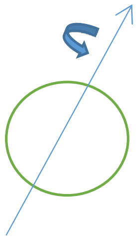
$$\therefore\quad [H,\vec{L}+\vec{s}]=0$$

このことから、軌道角運動量の他に、電子に固有の角運動量(スピン)を付け加えた全角運動量$\vec{\mathrm{L}}=\vec{L}+\vec{s}$が、相対論的ハミルトニアンと可換な量となり保存量となる。

電子の全角運動量　＝電子の軌道角運動量＋電子のスピン角運動量

$$\vec{\mathbf{L}}=\vec{L}+\vec{s}$$

電子は固有のスピン角運動量をもつことが示唆される。ただし、電子は自転しているわけではない。



＜補遺・参考＞

$$i\hbar\frac{d}{dt}\langle\hat{\mathrm{Q}}\rangle=\langle[\hat{\mathrm{Q}},\hat{\mathrm{H}}]\rangle+i\hbar\langle\frac{\partial\hat{\mathrm{Q}}}{\partial t}\rangle$$

物理量$\hat{\mathrm{Q}}$の期待値$\langle\hat{\mathrm{Q}}\rangle$が変化しない。→　$\hat{\mathrm{Q}}$が保存量　→　$i\hbar\frac{d}{dt}\langle\hat{\mathrm{Q}}\rangle=0$

$\hat{\mathrm{Q}}$は時間的に変化しない量で$t$を含まない。

$$\frac{\partial\hat{\mathrm{Q}}}{\partial t}=0$$

$\langle[\hat{\mathrm{Q}},\hat{\mathrm{H}}]\rangle=0$なので　→　$[\hat{\mathrm{Q}},\hat{\mathrm{H}}]=0$

物理量$\hat{\mathrm{Q}}$の保存則がハミルトニアンHの下で成り立つ必要十分条件　$\Rightarrow$　$[\hat{\mathrm{Q}},\hat{\mathrm{H}}]=0$

## V．ローレンツ対称性について

ローレンツ変換

$$L_\mu^\nu = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \beta = \frac{\mathrm{V}}{c}$$

$i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi = mc\psi$　の式がローレンツ対称性を持つか調べる。

$\partial'_\nu = L_\nu^\mu\partial_\mu$　…①

ローレンツ変換後波動関数$\psi(x)$が、新しい座標系の波動関数$\psi'(x')$に行列Ｓで変換されるものとする。

$\psi'(x')$の各成分が$\psi(x)$の一次結合で表されるということ。

$\psi'(x') = \mathrm{S}\psi(x)$ …②

$i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi = mc\psi$ …③

③の左方からＳをかけると

$i\hbar\mathrm{S}\gamma^\mu\partial_\mu\psi = mc\mathrm{S}\psi$ …④

$i\hbar\gamma^\nu\partial'_\nu\psi' = mc\psi'$ …⑤

に①②を代入すると

$i\hbar\gamma^\nu L_\nu^\mu\partial_\mu\mathrm{S}\psi = mc\mathrm{S}\psi$ …⑥

④と⑥から

$i\hbar\mathrm{S}\gamma^\mu\partial_\mu\psi = i\hbar\gamma^\nu L_\nu^\mu\partial_\mu\mathrm{S}\psi \quad\rightarrow\quad i\hbar S\gamma^\mu\partial_\mu\psi = i\hbar\gamma^\nu L_\nu^\mu\mathrm{S}\partial_\mu\psi \quad\rightarrow\quad \mathrm{S}\gamma^\mu = \gamma^\nu L_\nu^\mu\mathrm{S}$ …⑦

$\mathrm{S}\gamma^\mu = \gamma^\nu L_\nu^\mu\mathrm{S}$

の条件を満たすＳが存在するときに③から

$i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi = mc\psi \quad\rightarrow\quad i\hbar\mathrm{S}\gamma^\mu\partial_\mu\psi = mc\mathrm{S}\psi \quad\rightarrow\quad i\hbar\gamma^\nu L_\nu^\mu\mathrm{S}\partial_\mu\psi = mc\mathrm{S}\psi$ …⑧

$i\hbar\gamma^\nu L_\nu^\mu\partial_\mu(\mathrm{S}\psi) = mc(\mathrm{S}\psi)$ …⑨

$i\hbar\gamma^\nu\partial'_\nu(\mathrm{S}\psi) = mc(\mathrm{S}\psi) \quad\rightarrow\quad i\hbar\gamma^\nu\partial'_\nu\psi' = mc\psi'$ …⑩

∴　ディラック方程式は、ローレンツ変換に対して対称性を保つ式である。

## VI. ディラック方程式の解

$$\left(i\hbar\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - mc\right)\psi = 0 \cdots ①$$

ここから先の議論においては、$\hbar = c = 1$ 自然単位系を用いて議論を簡単にする。

$$\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\psi = 0 \cdots ②$$

$$p^{\mu} = \left(E, p_x, p_y, p_z\right) \quad p_{\mu} = \left(E, -p_x, -p_y, -p_z\right) \quad x^{\mu} = \left(t, x, y, z\right) \quad x_{\mu} = \left(t, -x, -y, -z\right)$$

$$\psi = u(p^{\mu})e^{-ip^{\mu}x_{\mu}} = u(E,\vec{p})e^{-i\left(Et - p_x x - p_y y - p_z z\right)} = u(E,\vec{p})e^{-i\left(Et - \vec{p}.\vec{r}\right)} = u(E,\vec{p})e^{i\left(\vec{p}.\vec{r} - Et\right)} \cdots ③$$

$$\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)u(E,\vec{p})e^{-i\left(Et - p_x x - p_y y - p_z z\right)} = 0$$

$$\left(i\gamma^{0}\partial_{0} + i\gamma^{1}\partial_{1} + i\gamma^{2}\partial_{2} + i\gamma^{3}\partial_{3} - m\right)u(E,\vec{p})e^{-i\left(Et - p_x x - p_y y - p_z z\right)} = 0$$

$$\left(i(-i)\gamma^{0}E + i(-i)\gamma^{1}(-p_x) + i(-i)\gamma^{2}(-p_y) + i(-i)\gamma^{3}(-p_z) - m\right)u(E,\vec{p})e^{-i\left(Et - p_x x - p_y y - p_z z\right)} = 0$$

$$\left(\gamma^{0}E - \gamma^{1}p_x - \gamma^{2}p_y - \gamma^{3}p_z - m\right)u(E,\vec{p})e^{-i\left(Et - p_x x - p_y y - p_z z\right)} = 0$$

$$\left(\gamma^{0}E + \gamma^{1}p_1 + \gamma^{2}p_2 + \gamma^{3}p_3 - m\right)u = 0 \cdots ④$$

$$\left(\gamma^{\mu}p_{\mu} - m\right)u = 0 \cdots ⑤$$

$\vec{p} = 0$ 　のとき

$$\left(\gamma^{0}p_0 - m\right)u = \left(\gamma^{0}E - m\right)u = \gamma^{0}Eu - mu = 0 \cdots ⑥$$

$$\gamma^{0}E = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}E \qquad \gamma^{0}Eu = mu \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}Eu = mu$$

$$\begin{bmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = m\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} E\varphi_1 &= m\varphi_1 \\ E\varphi_2 &= m\varphi_2 \\ E\varphi_3 &= -m\varphi_3 \\ E\varphi_4 &= -m\varphi_4 \end{aligned}$$

$E = m > 0$ 　　　　　　　　　　$E = -m < 0$

$$u_1(m,0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad u_2(m,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad u_3(-m,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad u_3(-m,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\psi = u(E,\vec{p})e^{i(\vec{p}.\vec{r}-Et)}$　　なので　$\psi = u(E,0)e^{-iEt}$

∴ まとめると粒子が静止している　$\vec{p}=0$　のときは

E＞0　のとき

$$\psi_1 = u_1(m,0)e^{-iEt} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-imt} \qquad \psi_2 = u_2(m,0)e^{-iEt} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-imt}$$

E＜0　のとき

$$\psi_3 = u_3(-m,0)e^{-i(-m)t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{imt} \qquad \psi_4 = u_4(-m,0)e^{-i(-m)t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{imt}$$

次に　粒子が運動しているときは

$$\left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} E + \begin{bmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{bmatrix} p_1 + \begin{bmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{bmatrix} p_2 + \begin{bmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{bmatrix} p_3 - \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} m \right) u = 0 \cdots ⑥$$

$$\left(\begin{bmatrix} EI & 0 \\ 0 & -EI \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \sigma_1.p_1 \\ -\sigma_1.p_1 & 0 \end{bmatrix}_1 + \begin{bmatrix} 0 & \sigma_2.p_2 \\ -\sigma_2.p_2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \sigma_3.p_3 \\ -\sigma_3.p_3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} mI & 0 \\ 0 & mI \end{bmatrix}\right) u = 0$$

$$\begin{pmatrix} (E-m)I & \sigma_1.p_1+\sigma_2.p_2+\sigma_3.p_3 \\ -(\sigma_1.p_1+\sigma_2.p_2+\sigma_3.p_3) & -(E+m)I \end{pmatrix} u = 0 \cdots ⑦$$

$$\begin{pmatrix} (E-m)I & -(\sigma_1.p_x+\sigma_2.p_y+\sigma_3.p_z) \\ (\sigma_1.p_x+\sigma_2.p_y+\sigma_3.p_z) & -(E+m)I \end{pmatrix} u = 0$$

$$\begin{pmatrix} (E-m)I & -\vec{\sigma}.\vec{p} \\ \vec{\sigma}.\vec{p} & -(E+m)I \end{pmatrix} u = 0 \cdots ⑧$$

$u = \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix}$　・・⑩　２行１列の２つの行列の組で表す。

$$\begin{pmatrix} (E-m)I & -\vec{\sigma}.\vec{p} \\ \vec{\sigma}.\vec{p} & -(E+m)I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = 0 \cdot\cdot ⑩$$

$$(E-m)u_A = \vec{\sigma}.\vec{p}u_B$$
$$(E+m)u_B = \vec{\sigma}.\vec{p}u_A \quad \cdots ⑪$$

$$u_A = \frac{\vec{\sigma}.\vec{p}}{(E-m)}u_B$$
$$u_B = \frac{\vec{\sigma}.\vec{p}}{(E+m)}u_A \quad \cdots ⑫$$

⑦は次のように表す $\vec{\sigma}.\vec{p} = \sigma_1.p_x + \sigma_2.p_y + \sigma_3.p_z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} p_x + \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} p_y + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} p_z$

$$\vec{\sigma}.\vec{p} = \begin{bmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{bmatrix}$$

$$u_B = \frac{\vec{\sigma}.\vec{p}}{(E+m)}u_A = \frac{1}{(E+m)}\begin{bmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{bmatrix}u_A \cdots ⑬$$

$u_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の場合 $u_B = \frac{\vec{\sigma}.\vec{p}}{(E+m)}u_A = \frac{1}{(E+m)}\begin{bmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$u_B = \frac{\vec{\sigma}.\vec{p}}{(E+m)}u_A = \frac{1}{(E+m)}\begin{bmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E+m} \end{pmatrix} \cdots ⑭$$

$$u_1 = N_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E+m} \end{pmatrix}$$

$u_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の場合 $u_B = \frac{\vec{\sigma}.\vec{p}}{(E+m)}u_A = \frac{1}{(E+m)}\begin{bmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$u_B = \frac{\vec{\sigma}.\vec{p}}{(E+m)}u_A = \frac{1}{(E+m)}\begin{bmatrix} p_x - ip_y \\ -p_z \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p_x - ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix} \cdots ⑮$$

$$u_2 = N_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{p_x - ip_y}{E+m} \\ \dfrac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix}$$

$$u_A = \frac{\vec{\sigma}.\vec{p}}{(E-m)} u_B = \frac{1}{(E-m)} \begin{bmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{bmatrix} u_B$$

$u_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$の場合　$u_A = \dfrac{\vec{\sigma}.\vec{p}}{(E-m)} u_B = \dfrac{1}{(E-m)} \begin{bmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$u_A = \frac{\vec{\sigma}.\vec{p}}{(E-m)} u_B = \frac{1}{(E-m)} \begin{bmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{p_z}{E+m} \\ \dfrac{p_x + ip_y}{E+m} \end{pmatrix} \cdot\cdot ⑯$$

$$u_3 = N_3 \begin{pmatrix} \dfrac{p_z}{E-m} \\ \dfrac{p_x + ip_y}{E-m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$u_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$の場合　$u_A = \dfrac{\vec{\sigma}.\vec{p}}{(E-m)} u_B = \dfrac{1}{(E-m)} \begin{bmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$u_A = \frac{\vec{\sigma}.\vec{p}}{(E-m)} u_B = \frac{1}{(E-m)} \begin{bmatrix} p_x - ip_y \\ -p_z \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{p_x - ip_y}{E-m} \\ \dfrac{-p_z}{E-m} \end{pmatrix} \cdot\cdot ⑰$$

$$u_4 = N_4 \begin{pmatrix} \dfrac{p_x - ip_y}{E-m} \\ \dfrac{-p_z}{E-m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} (E-m)I & -\vec{\sigma}.\vec{p} \\ \vec{\sigma}.\vec{p} & -(E+m)I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = 0$　が解を持つ条件として

$$\begin{vmatrix} (E-m)I & -\vec{\sigma}.\vec{p} \\ \vec{\sigma}.\vec{p} & -(E-m)I \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \quad -(E^2 - m^2)I^2 + (\vec{\sigma}.\vec{p})^2 = 0$$

$$\vec{\sigma}.\vec{p}=\begin{bmatrix} p_z & p_x-ip_y \\ p_x+ip_y & -p_z \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad (\vec{\sigma}.\vec{p})^2=\begin{bmatrix} p_z & p_x-ip_y \\ p_x+ip_y & -p_z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_z & p_x-ip_y \\ p_x+ip_y & -p_z \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} p_z & p_x-ip_y \\ p_x+ip_y & -p_z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_z & p_x-ip_y \\ p_x+ip_y & -p_z \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} {p_z}^2+{p_x}^2+{p_z}^2 & p_zp_x-ip_zp_y-p_xp_z+ip_yp_z \\ p_xp_z+ip_yp_z-p_zp_x-ip_zp_y & {p_z}^2+{p_x}^2+{p_z}^2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} P^2 & 0 \\ 0 & P^2 \end{bmatrix}$$

$$-(E^2-m^2)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+P^2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=0 \qquad \left(-(E^2-m^2)+P^2\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=0$$

$$-(E^2-m^2)+P^2=0$$

$$E^2=P^2+m^2$$

$$E=\pm\sqrt{P^2+m^2}$$

従って

$\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m\right)\psi=0$ ・の解 $\qquad \psi=\left(\psi_1 \quad \psi_2 \quad \psi_3 \quad \psi_4\right)$

$$\psi_i=u_i(E,\vec{p})e^{i\left(\vec{p}.\vec{r}-Et\right)}$$

$$u_i(E,\vec{p})$$

粒子が静止しているときを参考にすると

$$E=\sqrt{P^2+m^2}>0 \qquad\qquad E=-\sqrt{P^2+m^2}<0$$

$$u_1=N_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{p_z}{E+m} \\ \dfrac{p_x+ip_y}{E+m} \end{pmatrix} \quad u_2=N_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \dfrac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix} \quad u_3=N_3\begin{pmatrix} \dfrac{p_z}{E-m} \\ \dfrac{p_x+ip_y}{E-m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_4=N_4\begin{pmatrix} \dfrac{p_x-ip_y}{E-m} \\ \dfrac{-p_z}{E-m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

波動関数を規格化することから

$$u_1 u_1^* = N_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{p_z}{E+m} \\ \dfrac{p_x+ip_y}{E+m} \end{pmatrix} N_1^* \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dfrac{p_z}{E+m} & \dfrac{p_x-ip_y}{E+m} \end{pmatrix} \qquad 1 = N_1^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{p_z}{E+m} \\ \dfrac{p_x+ip_y}{E+m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dfrac{p_z}{E+m} & \dfrac{p_x-ip_y}{E+m} \end{pmatrix}$$

$$1 = N_1^2\left(1+\frac{p_z^2}{(E+m)^2}+\frac{p_x^2+p_y^2}{(E+m)^2}\right) = N_1^2\left(\frac{p_z^2+p_x^2+p_y^2+(E+m)^2}{(E+m)^2}\right)$$

$$1 = N_1^2\left(\frac{p^2+(E+m)^2}{(E+m)^2}\right) = N_1^2\left(\frac{E^2-m^2+(E+m)^2}{(E+m)^2}\right)$$

$$1 = N_1^2\left(\frac{E^2-m^2+E^2+m^2+2mE}{(E+m)^2}\right) = N_1^2\left(\frac{2E(E+m)}{(E+m)^2}\right) = N_1^2\left(\frac{2E}{E+m}\right)$$

$$N_1 = \sqrt{\frac{E+m}{2E}}, N_2 = \sqrt{\frac{E+m}{2E}}, N_3 = \sqrt{\frac{|E|+m}{2|E|}}, N_4 = \sqrt{\frac{|E|+m}{2|E|}} \qquad N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = \sqrt{\frac{|E|+m}{2|E|}}$$

## Ⅶ. 電磁場中での荷電粒子のラグラジアン

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} \quad B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \qquad \vec{E} = -grad\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial t} \quad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \qquad \vec{B} = rot\vec{A}$$

$$E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t} \quad B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

Lorentz　force　を含む運動方程式は　　　※非相対論的な扱い

$$\vec{F} = q\{\vec{E} + \vec{\upsilon} \times \vec{B}\} \cdots ①$$

$$F_x = q\left\{-\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} - (\upsilon_y \times B_z - \upsilon_z \times B_y)\right\}$$

$$= q\left\{-\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} - (\upsilon_y \times (\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}) - \upsilon_z \times (\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x})\right\}$$

$$= q\left\{-\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} + \upsilon_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + \upsilon_z \frac{\partial A_z}{\partial x} - \upsilon_x \frac{\partial A_x}{\partial x} - \upsilon_y \frac{\partial A_x}{\partial y} - \upsilon_z \frac{\partial A_x}{\partial z}\right\}$$

$$= q\left\{-\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(\upsilon_x A_x + \upsilon_y A_y + \upsilon_z A_z) - (\frac{\partial A_x}{\partial t} + \upsilon_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial A_x}{\partial y} + \upsilon_z \frac{\partial A_x}{\partial z})\right\}$$

$$=q\left\{-\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}(\upsilon_x A_x+\upsilon_y A_y+\upsilon_z A_z)-\frac{dA_x}{dt}\right\}$$

$$=-\frac{\partial}{\partial x}\left[q\phi-q(\upsilon_x A_x+\upsilon_y A_y+\upsilon_z A_z)\right]+\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\upsilon_x}\{q\phi-(\upsilon_x A_x+\upsilon_y A_y+\upsilon_z A_z)\}\right]$$

$$F_x=-\frac{\partial}{\partial x}\left[q\phi-q\vec{\upsilon}.\vec{A}\right]+\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\upsilon_x}\{q\phi-q\vec{\upsilon}.\vec{A}\}\right]\qquad F_x=-\frac{\partial}{\partial x}\left[q\phi-q\vec{\upsilon}.\vec{A}\right]+\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{x}}\{q\phi-q\vec{\upsilon}.\vec{A}\}\right]\cdot\cdot②$$

ここで$U=q\phi-q\vec{\upsilon}.\vec{A}$とおくと

$$F_x=-\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial U}{\partial\dot{x}}\right]\qquad\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{x}}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}=F_x=-\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial U}{\partial\dot{x}}\right]$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{x}}(T-U)\right)-\frac{\partial}{\partial x}(T-U)=0\qquad\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0\cdots③$$

ここで$L=T-q\phi+q\vec{v}.\vec{A}$とおいた。

特殊相対論的運動方程式は次の通り。補足で詳細を扱っています。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)=q\left(\vec{E}+\vec{\upsilon}\times\vec{B}\right)\qquad\beta=\frac{\upsilon}{c}$$

$$L=-m_0c^2\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}-q(\phi-\vec{\upsilon}.\vec{A})$$

ここで$L=T-q\phi+q\vec{\upsilon}.\vec{A}$より

$$L=\frac{1}{2}m(\upsilon_x{}^2+\upsilon_y{}^2+\upsilon_z{}^2)-q\phi+q(\upsilon_x A_x+\upsilon_y A_y+\upsilon_z A_z)$$

$$P_x=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=m\upsilon_x+qA_x\qquad m\upsilon_x=P_x-qA_x$$

$$P_y=\frac{\partial L}{\partial\dot{y}}=m\upsilon_y+qA_y\qquad m\upsilon_y=P_y-qA_y$$

$$P_z=\frac{\partial L}{\partial\dot{z}}=m\upsilon_z+qA_z\qquad m\upsilon_z=P_z-qA_z$$

$$H=\dot{x}P_x+\dot{y}P_y+\dot{z}P_z-L\cdots④$$

$$=\dot{x}(m\upsilon_x+qA_x)+\dot{y}(m\upsilon_y+qA_y)+\dot{z}(m\upsilon_z+qA_z)-L$$

$$=(m\upsilon_x{}^2+q\upsilon_x A_x)+(m\upsilon_y{}^2+q\upsilon_y A_y)+(m\upsilon_z{}^2+q\upsilon_z A_z)-L$$

$$=(m\upsilon_x{}^2+m\upsilon_y{}^2+m\upsilon_z{}^2)+q(\upsilon_x A_x+\upsilon_y A_y+\upsilon_z A_z)-L$$

$$=(m\upsilon_x{}^2+m\upsilon_y{}^2+m\upsilon_z{}^2)+q(\upsilon_x A_x+\upsilon_y A_y+\upsilon_z A_z)-\{\frac{1}{2}m(\upsilon_x{}^2+\upsilon_y{}^2+\upsilon_z{}^2)-q\phi+q(\upsilon_x A_x+\upsilon_y A_y+\upsilon_z A_z)\}$$

$$=\frac{1}{2}m(\upsilon_x{}^2+\upsilon_y{}^2+\upsilon_z{}^2)+q\phi$$

$$=\frac{1}{2}m\{(\frac{P_x-qA_x}{m})^2+(\frac{P_y-qA_y}{m})^2+(\frac{P_z-qA_z}{m})^2)+q\phi$$

$$=\frac{1}{2m}\{(P_x-qA_x)^2+(P_y-qA_y)^2+(P_z-qA_z)^2)+q\phi$$

$H=\frac{1}{2m}(\vec{P}-q\vec{A})^2+q\phi\cdots⑤$　となる。

自由粒子の場合のハミルトニアンHは

$H(\vec{P},\vec{x})=\frac{1}{2m}\vec{P}^2=E$　となり　磁場中の荷電粒子のハミルトニアンは次の通りなので

$H=\frac{1}{2m}(\vec{P}-q\vec{A})^2+q\phi=E\cdots⑥$　なので自由粒子のハミルトニアン H と比較すると

$$H(\vec{P}-q\vec{A},\vec{x})=E-q\phi \quad\Leftrightarrow\quad H(\vec{P},\vec{x})=\frac{1}{2m}\vec{P}^2=E$$

従って、次の電磁場　$A^\mu=(\phi,\vec{A})$　の中での荷電粒子の

ディラック方程式は、下記の通りに運動量とエネルギーの置換をすればよい。

$\vec{p}\Rightarrow\vec{P}-q\vec{A}$　　　$E\Rightarrow E-q\phi$　‥⑦

$$\begin{pmatrix}(E-m)I & -\vec{\sigma}.\vec{p}\\ \vec{\sigma}.\vec{p} & -(E+m)I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_A\\ u_B\end{pmatrix}=0 \quad\cdots⑧$$

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}.\vec{p}u_B&=(E-m)u_A\\ \vec{\sigma}.\vec{p}u_A&=(E+m)u_B\end{aligned}\quad\cdots⑨$$

$$\begin{aligned}(\vec{\sigma}.\vec{p}-q\vec{\sigma}.\vec{A})u_B&=(E-m-q\phi)u_A\\ (\vec{\sigma}.\vec{p}-q\vec{\sigma}.\vec{A})u_A&=(E+m-q\phi)u_B\end{aligned}\quad\cdots⑩$$

上式に　$(E+m-q\phi)$　を右からかけると

$$(\vec{\sigma}.\vec{p}-q\vec{\sigma}.\vec{A})(E+m-q\phi)u_B=(E-m-q\phi)(E+m-q\phi)u_A$$

$$(\vec{\sigma}.\vec{p}-q\vec{\sigma}.\vec{A})(\vec{\sigma}.\vec{p}-q\vec{\sigma}.\vec{A})u_A=(E-m-q\phi)(E+m-q\phi)u_A$$

$T = E - m$

$(\vec{\sigma}.\vec{p} - q\vec{\sigma}.\vec{A})(\vec{\sigma}.\vec{p} - q\vec{\sigma}.\vec{A})u_A = (T - q\phi)(T + 2m - q\phi)u_A$

非相対論的な運動エネルギー$T$は　$T \ll m$　をとなるので

$(\vec{\sigma}.\vec{p} - q\vec{\sigma}.\vec{A})(\vec{\sigma}.\vec{p} - q\vec{\sigma}.\vec{A})u_A \approx 2m(T - q\phi)u_A \cdots$ ⑪

$$\left[(\vec{\sigma}.\vec{p})^2 - q(\vec{\sigma}.\vec{p})(\vec{\sigma}.\vec{A}) - q(\vec{\sigma}.\vec{A})(\vec{\sigma}.\vec{p}) + q^2(\vec{\sigma}.\vec{A})^2\right] \approx 2m(T - q\phi)u_A$$

$$\vec{\sigma}.\vec{p} = \sigma_1.p_x + \sigma_2.p_y + \sigma_3.p_z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} p_x + \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} p_y + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} p_z$$

$$\vec{\sigma}.\vec{p} = \begin{bmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{bmatrix} \cdots ⑫$$

$$(\vec{\sigma}.\vec{A})(\vec{\sigma}.\vec{B}) = \begin{bmatrix} A_z & A_x - iA_y \\ A_x + iA_y & -A_z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_z & B_x - iB_y \\ B_x + iB_y & -B_z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_z & A_x - iA_y \\ A_x + iA_y & -A_z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_z & B_x - iB_y \\ B_x + iB_y & -B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_zB_z + (A_x - iA_y)(B_x + iB_y) & A_z(B_x - iB_y) - (A_x - iA_y)B_z \\ (A_x + iA_y)B_z - A_z(B_x + iB_y) & (A_x + iA_y)(B_x - iB_y) + A_zB_z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_zB_z + A_xB_x + A_yB_y + i(A_xB_y - A_yB_x) & A_zB_x - A_xB_z + i(A_yB_z - A_zB_y) \\ A_xB_z - A_zB_x + i(A_yB_z - A_zB_y) & A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z + i(A_yB_x - A_xB_y) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_zB_z + A_xB_x + A_yB_y + i(A_xB_y - A_yB_x) & A_zB_x - A_xB_z + i(A_yB_z - A_zB_y) \\ -(A_zB_x - A_xB_z) + i(A_yB_z - A_zB_y) & A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z + i(A_yB_x - A_xB_y) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \vec{A}.\vec{B} + i(\vec{A}\times\vec{B})_z & (\vec{A}\times\vec{B})_y + i(\vec{A}\times\vec{B})_x \\ -(\vec{A}\times\vec{B})_y + i(\vec{A}\times\vec{B})_x & \vec{A}.\vec{B} - i(\vec{A}\times\vec{B})_z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \vec{A}.\vec{B} & 0 \\ 0 & \vec{A}.\vec{B} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & +i(\vec{A}\times\vec{B})_x \\ i(\vec{A}\times\vec{B})_x & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & (\vec{A}\times\vec{B})_y \\ -(\vec{A}\times\vec{B})_y & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i(\vec{A}\times\vec{B})_z & 0 \\ 0 & -i(\vec{A}\times\vec{B})_z \end{bmatrix}$$

$$= \vec{A}.\vec{B}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + i(\vec{A}\times\vec{B})_x\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + i(\vec{A}\times\vec{B})_y\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} + i(\vec{A}\times\vec{B})_z\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \vec{A}.\vec{B}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + i\sigma_x(\vec{A}\times\vec{B})_x + i\sigma_y(\vec{A}\times\vec{B})_y + i\sigma_z(\vec{A}\times\vec{B})_z$$

$$= \vec{A}.\vec{B} + i\vec{\sigma}.(\vec{A}\times\vec{B}) \quad \cdots ⑬$$

$$(\vec{\sigma}.\vec{p})^2 = \begin{bmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_z^2 + (p_x - ip_y)(p_x + ip_y) & p_z(p_x - ip_y) - (p_x - ip_y)p_z \\ (p_x + ip_y)p_z - p_z(p_x + ip_y) & (p_x + ip_y)(p_x - ip_y) + p_z^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p_z^2 + p_x^2 + p_y^2 & p_zp_x - ip_zp_y - p_xp_z + ip_yp_z \\ p_xp_z + ip_yp_z - p_zp_x - ip_zp_y & p_z^2 + p_x^2 + p_y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p^2 & 0 \\ 0 & p^2 \end{bmatrix} = p^2\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = (\vec{p})^2$$

$$\therefore \quad (\vec{\sigma}.\vec{A})^2 = (\vec{A})^2 \ (\vec{\sigma}.\vec{B})^2 = (\vec{B})^2$$

$$\left[(\vec{\sigma}.\vec{p})^2 - q(\vec{\sigma}.\vec{p})(\vec{\sigma}.\overrightarrow{A}) - q(\vec{\sigma}.\overrightarrow{A})(\vec{\sigma}.\vec{p}) + q^2(\vec{\sigma}.\overrightarrow{A})^2\right]u_A \approx 2m(T-q\phi)u_A$$

$$\left[(\vec{p})^2 - q(\vec{p}.\vec{A} + i\vec{\sigma}.(\vec{p}\times\overrightarrow{A})) - q(\vec{A}.\vec{p} + i\vec{\sigma}.(\vec{A}\times\overrightarrow{p})) + q^2(\overrightarrow{A})^2\right]u_A \approx 2m(T-q\phi)u_A$$

$$\left[\left((\vec{p})^2 - q\vec{p}.\vec{A} - q\vec{A}.\vec{p} + q^2(\overrightarrow{A})^2\right) - iq\left(\vec{\sigma}.(\vec{A}\times\overrightarrow{p}) + \vec{\sigma}.(\vec{p}\times\overrightarrow{A})\right)\right]u_A \approx 2m(T-q\phi)u_A$$

$$\left[\left(\vec{p} - q\vec{A}\right)^2 - iq\left(\vec{\sigma}.(\vec{A}\times\overrightarrow{p}) + \vec{\sigma}.(\vec{p}\times\overrightarrow{A})\right)\right]u_A \approx 2m(T-q\phi)u_A$$

$$\left[\left(\vec{p} - q\vec{A}\right)^2 - iq\vec{\sigma}.\left((\vec{A}\times\overrightarrow{p}) + (\vec{p}\times\overrightarrow{A})\right)\right]u_A \approx 2m(T-q\phi)u_A$$

$$\left[\left(\vec{p} - q\vec{A}\right)^2 - iq\vec{\sigma}.\left((-i\vec{A}\times\overrightarrow{\nabla}) + (-i\vec{\nabla}\times\overrightarrow{A})\right)\right]u_A \approx 2m(T-q\phi)u_A$$

$$\left[\left(\vec{p} - q\vec{A}\right)^2 - q\vec{\sigma}.\left((\vec{A}\times\overrightarrow{\nabla}) + (\vec{\nabla}\times\overrightarrow{A})\right)\right]u_A \approx 2m(T-q\phi)u_A$$

$$\left[\left(\vec{p} - q\vec{A}\right)^2 - q\vec{\sigma}.\vec{B}\right]u_A \approx 2m(T-q\phi)u_A$$

$$\left[\left(\vec{p} - q\vec{A}\right)^2 - q\vec{\sigma}.\vec{B} + 2mq\phi\right]u_A \approx 2mTu_A$$

$$\left[\frac{1}{2m}\left(\vec{p} - q\vec{A}\right)^2 - \frac{q}{2m}\vec{\sigma}.\vec{B} + q\phi\right]u_A \approx Tu_A \cdots ⑭$$

$\vec{\mu} = \dfrac{q}{2m}\vec{\sigma}$　と表すと

$-\dfrac{q}{2m}\vec{\sigma}.\vec{B} = -\vec{\mu}.\vec{B}$　$\cdots$⑮　は非相対論的なスピン軌道相互作用のエネルギーを示している。

ここで $\vec{S} = \dfrac{1}{2}\vec{\sigma}$ とおくと　$\vec{\mu} = \dfrac{q}{m}\vec{S}$　荷電粒子が電子であるときには

$q = -e$　　$\vec{\mu} = -\dfrac{e}{m}\vec{S}$　　$\left[\dfrac{1}{2m}\left(\vec{p} + e\vec{A}\right)^2 - \dfrac{(-e)}{2m}\vec{\sigma}.\vec{B} - e\phi\right]u_A \approx Tu_A \cdots$⑯

ここで $g = 2$ ならば　　$\vec{\mu} = g\dfrac{q}{2m}\vec{S} \cdots$⑰

## Ⅷ.反物質（反粒子）についての扱い

$\vec{P} \Rightarrow \vec{P} - q\vec{A}$ ････① ここで $\vec{P} \Rightarrow -i\partial_\mu$ と演算子に書き換えると

$-i\partial_\mu \Rightarrow -i\partial_\mu - qA_\mu \qquad \partial_\mu \Rightarrow \partial_\mu - iqA_\mu$ ････②

ここで $q \Rightarrow -e$ とおくと $\partial_\mu \Rightarrow \partial_\mu + ieA_\mu$ ････③

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0$$

$$i\gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu)\psi - m\psi = 0 \quad \cdots\cdots ④$$

$$ii\gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu)\psi - im\psi = 0$$

$$-\gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu)\psi - im\psi = 0 \Rightarrow \gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu)\psi + im\psi = 0$$

複素共役をとると

$$\gamma^{\mu^*} (\partial_\mu - ieA_\mu)\psi^* - im\psi^* = 0$$

左辺より→ $-i\gamma^2$ をかけると

$$-i\gamma^2\gamma^{\mu^*} (\partial_\mu - ieA_\mu)\psi^* + imi\gamma^2\psi^* = 0 \qquad i\gamma^\mu\gamma^2 (\partial_\mu - ieA_\mu)\psi^* + imi\gamma^2\psi^* = 0$$

$\gamma^\mu (\partial_\mu - ieA_\mu) i\gamma^2\psi^* + imi\gamma^2\psi^* = 0$ ････⑤ $\psi' = i\gamma^2\psi^*$ とおくと次式になる

$$\gamma^\mu (\partial_\mu - ieA_\mu)\psi' + im\psi' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu)\psi + im\psi = 0 \quad \cdots\cdots ⑥$$

上記の左辺の方程式は、右辺の電子の方程式の電荷を－ｅに変化させた方程式となっている。

$\psi' = i\gamma^2\psi^*$ は電荷の大きさは同じで符号が反対の粒子（反粒子）の従う波動関数と見なすことができる。

$E = \sqrt{P^2 + m^2} > 0 \qquad\qquad E = -\sqrt{P^2 + m^2} < 0$

$$u_1 = N_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{p_z}{E+m} \\ \dfrac{p_x + ip_y}{E+m} \end{pmatrix} \quad u_2 = N_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{p_x - ip_y}{E+m} \\ \dfrac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix} \quad u_3 = N_3 \begin{pmatrix} \dfrac{p_z}{E-m} \\ \dfrac{p_x + ip_y}{E-m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_4 = N_4 \begin{pmatrix} \dfrac{p_x - ip_y}{E-m} \\ \dfrac{-p_z}{E-m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad i\gamma^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(ア) $\psi_1 = u_1(E,\vec{p})e^{i(\vec{p}.\vec{r}-Et)}$ を変換する。粒子の波動関数から反粒子の波動関数を導くと E>0

$$\psi_1^* = u_1^*(E,\vec{p})e^{-i(\vec{p}.\vec{r}-Et)} \qquad \psi^*{}_1 = N_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \end{pmatrix}^* e^{-i(\vec{p}.\vec{r}-Et)}$$

$$\psi_1' = i\gamma^2\psi^* = N_1\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x-ip_y}{E+m} \end{pmatrix} e^{-i(\vec{p}.\vec{r}-Et)} = N_1\begin{pmatrix} \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i(\vec{p}.\vec{r}-Et)}$$

$$= N_1\begin{pmatrix} \frac{(-p_x)-i(-p_y)}{(-E)-m} \\ \frac{-(-p_z)}{(-E)-m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i((-\vec{p}).\vec{r}-(-E)t)} = N_1\begin{pmatrix} \frac{(-p_x)-i(-p_y)}{(-E)-m} \\ \frac{-(-p_z)}{(-E)-m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i(\vec{p}.\vec{r}-Et)}$$

$$\psi_1' = u_4(-E,-\vec{p})e^{i((-\vec{p}).\vec{r}-(-E)t)} = u_4(-E,-\vec{p})e^{-i(\vec{p}.\vec{r}-Et)} = v_1(E,\vec{p})e^{-i(\vec{p}.\vec{r}-Et)}$$

$v_1(E,\vec{p}) = u_4(-E,-\vec{p}) \quad \Rightarrow$ エネルギー $E$ と運動量 $\vec{p}$ を逆符号にして代入した式になっている。

(イ) $\psi_2 = u_2(E,\vec{p})e^{i(\vec{p}.\vec{r}-Et)}$ を変換する。E>0

$$\psi_2^* = u_2^*(E,\vec{p})e^{-i(\vec{p}.\vec{r}-Et)} \qquad \psi^*{}_2 = N_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix}^* e^{-i(\vec{p}.\vec{r}-Et)}$$

$$\psi_2' = i\gamma^2\psi_2^* = N_2\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix} e^{-i(\vec{p}.\vec{r}-Et)} = (-N_2)\begin{pmatrix} \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i(\vec{p}.\vec{r}-Et)}$$

$$=(-N_2)\begin{pmatrix} \dfrac{-(-p_z)}{-(-E)+m} \\ \dfrac{-(-p_x)-i(-p_y)}{-(-E)+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\left((-\vec{p}).\vec{r}-(-E)t\right)} = (-N_2)\begin{pmatrix} \dfrac{(-p_z)}{(-E)-m} \\ \dfrac{(-p_x)+i(-p_y)}{(-E)-m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\left(\vec{p}.\vec{r}-Et\right)}$$

$$\psi_2{}' = u_3(-E,-\vec{p})e^{i\left((-\vec{p}).\vec{r}-(-E)t\right)} = u_3(-E,-\vec{p})e^{-i\left(\vec{p}.\vec{r}-Et\right)} = v_2(E,\vec{p})e^{-i\left(\vec{p}.\vec{r}-Et\right)}$$

$v_2(E,\vec{p}) = u_3(-E,-\vec{p})$ $\Rightarrow$ エネルギー $E$ と運動量 $\vec{p}$ を逆符号にして代入した式になっている。

(ウ) $\psi_3 = u_3(E,\vec{p})e^{i(\vec{p}.\vec{r}-Et)}$ を変換する。E＜0

$$\psi_3{}^* = u_3{}^*(E,\vec{p})e^{-i\left(\vec{p}.\vec{r}-Et\right)} \qquad \psi^*{}_3 = N_3\begin{pmatrix} \dfrac{p_z}{E-m} \\ \dfrac{p_x+ip_y}{E-m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^* e^{-i\left(\vec{p}.\vec{r}-Et\right)}$$

$$\psi_3{}' = i\gamma^2\psi_3{}^* = N_3\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{p_z}{E-m} \\ \dfrac{p_x-ip_y}{E-m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\left(\vec{p}.\vec{r}-Et\right)} = (-N_3)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{p_x-ip_y}{E-m} \\ \dfrac{-p_z}{E-m} \end{pmatrix} e^{-i\left(\vec{p}.\vec{r}-Et\right)}$$

$$=(-N_3)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{-(-p_x)+i(-p_y)}{-(-E)-m} \\ \dfrac{(-p_z)}{-(-E)-m} \end{pmatrix} e^{-i\left(\vec{p}.\vec{r}-Et\right)} = (-N_3)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{(-p_x)-i(-p_y)}{(-E)+m} \\ \dfrac{-(-p_z)}{(-E)+m} \end{pmatrix} e^{i\left((-\vec{p}).\vec{r}-(-E)t\right)}$$

$$\psi_3{}' = u_2(-E,-\vec{p})e^{i\left((-\vec{p}).\vec{r}-(-E)t\right)} = u_2(-E,-\vec{p})e^{-i\left(\vec{p}.\vec{r}-Et\right)} = v_3(E,\vec{p})e^{-i\left(\vec{p}.\vec{r}-Et\right)}$$

$v_3(E,\vec{p}) = u_2(-E,-\vec{p})$ $\Rightarrow$ エネルギー $E$ と運動量 $\vec{p}$ を逆符号にして代入した式になっている。

(エ) $\psi_4 = u_4(E,\vec{p})e^{i\left(\vec{p}.\vec{r}-Et\right)}$ を変換する。E＜0

$$\psi^*{}_4 = N_4\begin{pmatrix} \dfrac{p_x-ip_y}{E-m} \\ \dfrac{-p_z}{E-m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^* e^{-i\left(\vec{p}.\vec{r}-Et\right)}$$

$$\psi_4{}' = i\gamma^2\psi_4{}^* = N_4\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{p_x+ip_y}{E-m}\\\dfrac{-p_z}{E-m}\\0\\1\end{pmatrix}e^{-i\left(\vec{p}.\vec{r}-Et\right)} = N_4\begin{pmatrix}1\\0\\\dfrac{p_z}{E-m}\\\dfrac{p_x+ip_y}{E-m}\end{pmatrix}e^{-i\left(\vec{p}.\vec{r}-Et\right)}$$

$$= N_4\begin{pmatrix}1\\0\\\dfrac{-(-p_z)}{-(-E)-m}\\\dfrac{-(-p_x)-i(-p_y)}{-(-E)-m}\end{pmatrix}e^{-i\left(\vec{p}.\vec{r}-Et\right)} = N_4\begin{pmatrix}1\\0\\\dfrac{(-p_z)}{(-E)+m}\\\dfrac{(-p_x)+i(-p_y)}{(-E)+m}\end{pmatrix}e^{i\left((-\vec{p})\cdot\vec{r}-(-E)t\right)}$$

$$\psi_4{}' = u_1(-E,-\vec{p})e^{i\left((-\vec{p})\cdot\vec{r}-(-E)t\right)} = u_1(-E,-\vec{p})e^{-i\left(\vec{p}.\vec{r}-Et\right)} = v_4(E,\vec{p})e^{-i\left(\vec{p}.\vec{r}-Et\right)}$$

$v_4(E,\vec{p}) = u_1(-E,-\vec{p}) \quad \Rightarrow$ エネルギー $E$ と運動量 $\vec{p}$ を逆符号にして代入した式になっている。

以上 (ｱ)～(ｴ) から、ディラック方程式を解いたとき、エネルギーE＜０の状態を意味する電子の状態関数中のエネルギーと運動量の符号を反対にすれば、エネルギーがE＞０で、運動量も逆符号である陽電子の状態関数になることを示している。

すなわちE＜０の電子の状態関数は、E＞０の陽電子の状態関数でありそれぞれ二つの波動関数の合計４つの状態関数（スピノール）で電子の状態は正確に表現される。陽電子は、電子の取り得る状態の一つと解釈される。

また $2E > 2mc^2$ のエネルギーが真空中のディラックの海に与えられると、$E_{\text{電子}} = -mc^2 < 0$ の電子が飛びだし、$E_{\text{陽電子}} = mc^2 > 0$ で運動量も逆符号の陽電子がペアで現れることが予想される。

$$2mc^2 \to e^- + e^+$$

$\psi = ue^{-i\left(\vec{p}.\vec{r}-Et\right)}$ が次のディラック方程式を満たすときには

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)u(E,\vec{p})e^{-i\left(p_x x+p_y y+p_z z-Et\right)} = 0$$

$$\left(i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^1\partial_1 + i\gamma^2\partial_2 + i\gamma^3\partial_3 - m\right)u(E,\vec{p})e^{-i\left(p_x x+p_y y+p_z z-Et\right)} = 0$$

$$\left(i\gamma^0(-i)(-E) + i(-i)\gamma^1 p_x + i(-i)\gamma^2 p_y + i(-i)\gamma^3 p_z - m\right)u(E,\vec{p})e^{-i\left(p_x x+p_y y+p_z z-Et\right)} = 0$$

$$\left(-\gamma^0 E - \gamma^1(-p_x) - \gamma^2(-p_y) - \gamma^3(-p_z) - m\right)u(E,\vec{p})e^{-i\left(p_x x+p_y y+p_z z-Et\right)} = 0$$

$$\left(-\gamma^0 p_0 - \gamma^1 p_1 - \gamma^2 p_2 - \gamma^3 p_3 - m\right)u(E,\vec{p})e^{-i\left(p_x x+p_y y+p_z z-Et\right)} = 0$$

$$-\left(\gamma^0 p_0 + \gamma^1 p_1 + \gamma^2 p_2 + \gamma^3 p_3 + m\right)u(E,\vec{p})e^{-i\left(p_x x+p_y y+p_z z-Et\right)} = 0$$

$$\therefore \left(\gamma^0 p_0 + \gamma^1 p_1 + \gamma^2 p_2 + \gamma^3 p_3 + m\right)u = 0$$

$$\left(\gamma^\mu p_\mu + m\right)u = 0$$

$\vec{p} = 0$　のとき

$$\left(\gamma^0 p_0 + m\right)u = \left(\gamma^0 E + m\right)u = \gamma^0 Eu + mu = 0$$

$$\gamma^0 E = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} E \quad \gamma^0 Eu = -mu \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} Eu = -mu$$

$$\begin{bmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = -m \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} E\varphi_1 = -m\varphi_1 \\ E\varphi_2 = -m\varphi_2 \\ E\varphi_3 = m\varphi_3 \\ E\varphi_4 = m\varphi_4 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} E = -m \\ E = -m \\ E = m \\ E = m \end{matrix}$$

静止している陽電子（反粒子）についての解（まとめ）

$E = m > 0$　　　　$E = -m < 0$

$$v_1(m,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{imt} \qquad v_2(m,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{imt} \qquad v_4(-m,0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-imt} \qquad v_3(-m,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-imt}$$

$\psi = v(E, \vec{p})e^{-i\left(\vec{p}.\vec{r} - Et\right)}$ なので　$\psi = u(m,0)e^{imt}$

陽電子（反粒子）についての解（まとめ）

$E = \sqrt{P^2 + m^2} > 0$　　　　$E = -\sqrt{P^2 + m^2} < 0$　　$N = \sqrt{\dfrac{|E| + m}{2|E|}}$

$$N \begin{pmatrix} \dfrac{p_x - ip_y}{E+m} \\ \dfrac{-p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\left(\vec{p}.\vec{r} - Et\right)} \qquad N \begin{pmatrix} \dfrac{p_z}{E+m} \\ \dfrac{p_x + ip_y}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\left(\vec{p}.\vec{r} - Et\right)} \qquad N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{p_x - ip_y}{E-m} \\ \dfrac{-p_z}{E-m} \end{pmatrix} e^{-i\left(\vec{p}.\vec{r} - Et\right)} \qquad N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{p_z}{E-m} \\ \dfrac{p_x + ip_y}{E-m} \end{pmatrix} e^{-i\left(\vec{p}.\vec{r} - Et\right)}$$

## Ⅸ．その後の発展について

ディラック方程式の完成後、物理学の法則を導く際に対称性をとても重要視するようになる。
ディラック方程式は、ローレンツ変換において対称な理論である。その後、量子力学の波動関数の位相部分の対称性を論じる、ゲージ対称性を追求し、標準理論が完成した。量子力学は、場の量子論へと発展していく。

## Ⅹ．追記

１９３３年　シュレディンガーとディラックは、同時にノーベル物理学賞を授賞。
授賞理由　[For the discovery of new productive forms of atomic theory]
「原子理論の新しい有用な形式の発見に対して」

（注釈）

**交換関係**　[Ａ，Ｂ]＝ＡＢ－ＢＡ　普通の数値の場合　[Ａ，Ｂ]＝０
となり、積の順序は入れ替えて構わない。
しかし、Ａ、Ｂが行列、演算子表す場合には、必ずしも０にはならない。
演算の順序を入れ替えた場合の関係を示している。

**参考図書**


素粒子の物理　相原博昭　著　東京大学出版　2006 年
素粒子物理学　原　康夫　著　裳華房　2006 年
スピンと角運動量　岡本　良治　著　共立出版　2014 年
Particle physics　Handout9 2009　 Micaelsman term 2009 Prof Mark Thomson


補足事項については、本文中の内容をより深く理解するために記載したものです。より進んだ取り扱いについても慣れていきましょう。

補足事項

Ⅰ．相対論的ハミルトニアン及び電磁場を導く相対論的ラグラジアン

$$L=-m_0c^2\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}-q(\phi-\vec{\upsilon}.\vec{A})\cdots①$$ 相対論的ラグラジアン

$$L=-m_0c^2\sqrt{1-\frac{1}{c^2}(\upsilon_x{}^2+\upsilon_y{}^2+\upsilon_z{}^2)}-q\left(\phi-\upsilon_xA_x-\upsilon_yA_y-\upsilon_zA_z\right)\cdots②$$

$$P_x=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=\frac{\partial L}{\partial\upsilon_x}=-\frac{1}{2}m_0c^2\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\frac{1}{c^2}(-2\upsilon_x)+qA_x=\frac{m_0\upsilon_x}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}+qA_x=m\upsilon_x+qA_x$$

$$P_y=\frac{\partial L}{\partial\dot{y}}=\frac{\partial L}{\partial\upsilon_y}=-\frac{1}{2}m_0c^2\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\frac{1}{c^2}(-2\upsilon_y)+qA_y=\frac{m_0\upsilon_y}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}+qA_y=m\upsilon_y+qA_y$$

$$P_z=\frac{\partial L}{\partial\dot{z}}=\frac{\partial L}{\partial\upsilon_z}=-\frac{1}{2}m_0c^2\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\frac{1}{c^2}(-2\upsilon_z)+qA_z=\frac{m_0\upsilon_z}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}+qA_z=m\upsilon_z+qA_z$$

$$m\upsilon_x=P_x-qA_x\quad m\upsilon_y=P_y-qA_y\quad m\upsilon_z=P_z-qA_z$$

$$H=\dot{x}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}+\dot{y}\frac{\partial L}{\partial\dot{y}}+\dot{z}\frac{\partial L}{\partial\dot{z}}-L=\dot{x}P_x+\dot{y}P_y+\dot{z}P_z-L\quad\cdots③$$

$$=\dot{x}(m\upsilon_x+qA_x)+\dot{y}(m\upsilon_y+qA_y)+\dot{z}(m\upsilon_z+qA_z)-L\cdots④$$

$$=\upsilon_x(m\upsilon_x+qA_x)+\upsilon_y(m\upsilon_y+qA_y)+\upsilon_z(m\upsilon_z+qA_z)+m_0c^2\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}+q(\phi-\upsilon_xA_x-\upsilon_yA_y-\upsilon_zA_z)$$

$$=(m\upsilon_x{}^2+qA_x\upsilon_x)+(m\upsilon_y{}^2+qA_y\upsilon_y)+(m\upsilon_z{}^2+qA_z\upsilon_z)+m_0c^2\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}+(q\phi-q\upsilon_xA_x-q\upsilon_yA_y-q\upsilon_zA_z)$$

$$=m\upsilon_x{}^2+m\upsilon_y{}^2+m\upsilon_z{}^2+m_0c^2\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}+q\phi=m\left(\upsilon_x{}^2+\upsilon_y{}^2+\upsilon_z{}^2\right)+m_0c^2\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}+q\phi$$

$$=m\upsilon^2+m_0c^2\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}+q\phi$$

$$=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\upsilon^2+m_0c^2\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}+q\phi=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\upsilon^2+\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}c^2\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)+q\phi$$

$$=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\upsilon^2+\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\left(c^2-\upsilon^2\right)+q\phi=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}+q\phi=mc^2+q\phi\cdots⑤$$

$H=mc^2+q\phi\cdots⑥$　相対論的なハミルトニアン

ローレンツ変換におけるスカラー保存より

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2-p_x{}^2-p_y{}^2-p_z{}^2=m_0{}^2c^2 \qquad \left(\frac{E}{c}\right)^2=p_x{}^2+p_y{}^2+p_z{}^2+m_0{}^2c^2\cdots⑦$$

$$\frac{E}{c}=\sqrt{p_x{}^2+p_y{}^2+p_z{}^2+m_0{}^2c^2}\cdots⑧$$　⑥より　$E=mc^2=H-q\phi\cdots⑨$

$$\frac{(H-q\phi)}{c}=\sqrt{(P_x-qA_x)^2+\left(P_y-qA_y\right)^2+(P_z-qA_z)^2+m_0{}^2c^2}\cdots⑪$$

$$(H-q\phi)=c\sqrt{\left(\vec{P}-q\vec{A}\right)^2+m_0{}^2c^2}$$

電磁場中における相対論的ハミルトニアンは、次のようになる。

$$H=c\sqrt{\left(\vec{P}-q\vec{A}\right)^2+m_0{}^2c^2}+q\phi\cdots⑫ \qquad p^\mu=\left(\frac{H-q\phi}{c},\quad \vec{P}-q\vec{A}\right)\cdots⑬$$

電磁場（ポテンシャル・ベクトルポテンシャル）を導くラグラジアン密度を以下の通りに仮定する。

$$\mathfrak{L}=\frac{1}{2}\left(\vec{E}\cdot\vec{D}-\vec{H}\cdot\vec{B}\right)-\rho\phi+\dot{\vec{i}}\cdot\vec{A} \qquad \mathfrak{L}=\frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2-\frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2-\rho\phi+\dot{\vec{i}}\cdot\vec{A}$$

$$\vec{E}=-grad\phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \qquad \vec{B}=rot\vec{A}$$

$$\mathfrak{L}=\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(-grad\phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{2\mu_0}\left(rot\vec{A}\right)^2-\rho\phi+\dot{\vec{i}}\cdot\vec{A}\cdots⑭$$

$$\mathfrak{L}=\frac{1}{2}\varepsilon_0\left\{\left(-\frac{\partial\phi}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial t}\right)^2+\left(-\frac{\partial\phi}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial t}\right)^2+\left(-\frac{\partial\phi}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial t}\right)^2\right\}$$
$$-\frac{1}{2\mu_0}\left\{\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)^2\right\}-\rho\phi+i_x\cdot A_x+i_y\cdot A_y+i_z\cdot A_z$$

このラグラジアン密度関数にオイラー・ラグランジュ方程式を書き下す。

空間的部分についてのオイラー・ラグランジュ方程式を書き下すと

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial\left(\frac{\partial A_x}{\partial t}\right)}=-\frac{2}{2}\varepsilon\left(-\frac{\partial \phi}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial t}\right)=-\varepsilon\left(-\frac{\partial \phi}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial t}\right) \qquad \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\right)}=0$$

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial\left(\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)}=-\frac{2}{2\mu_0}(-1)\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)=\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \quad \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)}=-\frac{2}{2\mu_0}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)=-\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial A_x}=i_x$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial\left(\frac{\partial A_x}{\partial t}\right)}\right)=-\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \phi}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial t}\right) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\right)}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(0)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial\left(\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)}\right)=\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)}\right)=-\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial\left(\frac{\partial A_x}{\partial t}\right)}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\right)}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial\left(\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)}\right)-\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial A_x}=0 \cdots ⑮$$

$$-\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \phi}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial t}\right)+0+\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)-\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)-i_x=0 \cdots ⑯$$

ローレンツの条件式より

$$\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \phi}{\partial t}+\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=0 \qquad \frac{\partial \phi}{\partial t}=-\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)$$

$$\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2}+\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)-\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)-i_x=0$$

$$-\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)+\varepsilon\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2}+\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)-\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)-i_x=0$$

$$\frac{1}{\mu_0}\left(-\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial A_y}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)+\varepsilon\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2}+\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)+\frac{1}{\mu_0}\left(-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial A_x}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)-i_x=0$$

$$\frac{1}{\mu_0}\left(-\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial A_y}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial A_z}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\varepsilon\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2}-i_x=0$$

$$-\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right)+\varepsilon_0\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2}-i_x=0 \qquad -\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right)+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2}-\mu_0 i_x=0$$

$$\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2}-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)A_x=\mu_0 i_x \cdots ⑰$$

y，z 軸方向の成分についても同様に導ける。空間的部分について

$$\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2}-\Delta A_x=\mu_0 i_x \quad \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2}-\Delta A_y=\mu_0 i_y \quad \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2}-\Delta A_z=\mu_0 i_z$$

時間的部分についてオイラー・ラグランジュ方程式を書き下すと

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)}=0 \qquad \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)}=-\frac{2}{2}\varepsilon_0\left(-\frac{\partial \phi}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial t}\right)=\varepsilon_0\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}+\frac{\partial A_x}{\partial t}\right)$$

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)}=-\frac{2}{2}\varepsilon_0\left(-\frac{\partial \phi}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial t}\right)=\varepsilon_0\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}+\frac{\partial A_y}{\partial t}\right) \quad \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)}=-\frac{2}{2}\varepsilon_0\left(-\frac{\partial \phi}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial t}\right)=\varepsilon_0\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}+\frac{\partial A_z}{\partial t}\right)$$

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi}=-\rho$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)}\right)-\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi}\right)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(0)+\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}+\frac{\partial A_x}{\partial t}\right)+\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}+\frac{\partial A_y}{\partial t}\right)+\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}+\frac{\partial A_z}{\partial t}\right)+\rho=0$$

$$\varepsilon_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial A_x}{\partial t}\right)+\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial A_y}{\partial t}\right)+\varepsilon_0\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \phi}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial A_z}{\partial t}\right)+\rho=0$$

$$\varepsilon_0\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial A_x}{\partial t}\right)+\varepsilon_0\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial A_y}{\partial t}\right)+\varepsilon_0\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial A_z}{\partial t}\right)+\rho=0$$

$$\varepsilon_0\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}\right)+\varepsilon_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial A_x}{\partial t}\right)+\varepsilon_0\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial A_y}{\partial t}\right)+\varepsilon_0\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial A_z}{\partial t}\right)+\rho=0$$

$$\varepsilon_0\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}\right)+\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)=-\rho$$

ローレンツの条件式より

$$\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \phi}{\partial t}$$ を代入すると

$$\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)=-\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-\Delta\phi=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\cdots⑱$$

$$\partial_0\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_0\phi)}\right)+\partial_1\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_1\phi)}\right)+\partial_2\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_2\phi)}\right)+\partial_3\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_3\phi)}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial\phi}\right)=0$$

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial\phi}\right)=0\cdots⑲$$

$A^0=\phi$　とおくと　$A^\mu=\begin{pmatrix}A^0 & A^1 & A^2 & A^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\phi & A_x & A_y & A_z\end{pmatrix}$　と書けて

$$\mathfrak{L}=\frac{1}{2}\left(\vec{E}\cdot\vec{D}-\vec{H}\cdot\vec{B}\right)-\rho\phi+\dot{i}\cdot\vec{A} \qquad \vec{E}=-grad\phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \qquad \vec{B}=rot\vec{A}$$

オイラー・ラグランジュ方程式は次のようになる。

$\nu$ =0,1,2,3 について　$\partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu A^\nu)}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial A^\nu}\right)=0\cdots⑳$

$$\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2}-\Delta A_x=\mu_0 i_x \qquad \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2}-\Delta A_y=\mu_0 i_y \qquad \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2}-\Delta A_z=\mu_0 i_z$$

$$\therefore\quad \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\Delta\vec{A}=\mu_0\dot{i} \qquad \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-\Delta\phi=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

荷電粒子によって生じている場合にはラグランジュ関数Ｌは次式になる。

$$L=\iiint\int\frac{1}{2}\left(\vec{E}\cdot\vec{D}-\vec{H}\cdot\vec{B}\right)dxdydzdt\;+\sum\int\left(-q\phi+q\vec{\upsilon}\cdot\vec{A}\right)dt\cdots⑳$$

$\delta t$ の間に閉曲面Ｓから出てくる電子の数δＮ${}_e$は

$\delta N_e=\int n_e\vec{\upsilon}\cdot\vec{n}dS\delta t$　である。この間に通過する電気量δＱは、

$\delta Q=e\delta N_e=\int en_e\vec{\upsilon}\cdot\vec{n}dS\delta t$　閉曲面から単位時間あたりに出てくる電気量が電流Ｉなので

$I=\frac{\delta Q}{\delta t}=\frac{e\delta N_e}{\delta t}=\int en_e\vec{\upsilon}\cdot\vec{n}dS \quad I=\int\dot{i}\cdot\vec{n}dS=\int en_e\vec{\upsilon}\cdot\vec{n}dS$　両辺比較すると

$\dot{i}=en_e\vec{\upsilon}=\rho\vec{\upsilon}$　を次式中に代入すると

$$\iiiint \mathfrak{L}\, dxdydzdt = \iiiint \frac{1}{2}\left( \varepsilon_0 \vec{E}^2 - \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2 \right) dxdydzdt + \iiiint \left( -\rho\phi + \vec{i}\cdot\vec{A} \right) dxdydzdt$$

$$= \iiint\int \frac{1}{2}\left( \varepsilon_0 \vec{E}^2 - \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2 \right) dxdydzdt + \iiint\int (-\phi)\underbrace{\rho dxdydz}_{dq}\, dt + \iiint\int \vec{A}\cdot\vec{\upsilon}\,\underbrace{\rho dxdydz}_{dq}\, dt$$

$$= \iiint\int \frac{1}{2}\left( \varepsilon_0 \vec{E}^2 - \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2 \right) dxdydzdt + \sum\int (-q\phi) dt + \sum\int q\vec{A}\cdot\vec{\upsilon} dt$$

$$= \iiint\int \frac{1}{2}\left( \varepsilon_0 \vec{E}^2 - \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2 \right) dxdydzdt + \sum\int \left( -q\phi + q\vec{A}\cdot\vec{\upsilon} \right) dt$$ 点電荷が存在する場所だけ空間積分する。

## Ⅱ．電磁場中での荷電粒子の特殊相対論的ラグラジアンの扱い・ローレンツ力

$$L=-m_0c^2\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}-q(\phi-\vec{\upsilon}.\vec{A})=-m_0c^2\sqrt{1-\frac{(\upsilon_x{}^2+\upsilon_y{}^2+\upsilon_z{}^2)}{c^2}}-q\phi+q(\upsilon_xA_x+\upsilon_yA_y+\upsilon_zA_z)\cdots①$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=P_x=\frac{\partial}{\partial \upsilon_x}\left(-m_0c^2\sqrt{1-\frac{(\upsilon_x{}^2+\upsilon_y{}^2+\upsilon_z{}^2)}{c^2}}-q\phi+q(\upsilon_xA_x+\upsilon_yA_y+\upsilon_zA_z)\right)$$

$$=\frac{m_0\upsilon_x}{\sqrt{1-\frac{(\upsilon_x{}^2+\upsilon_y{}^2+\upsilon_z{}^2)}{c^2}}}+qA_x\cdots②$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\upsilon_x}{\sqrt{1-\frac{(\upsilon_x{}^2+\upsilon_y{}^2+\upsilon_z{}^2)}{c^2}}}+qA_x\right)$$

$$\frac{d}{dt}P_x=\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\upsilon_x}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)+q\frac{dA_x}{dt}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(-q\phi)+\frac{\partial}{\partial x}\big(q(\upsilon_xA_x+\upsilon_yA_y+\upsilon_zA_z)\big)=-q\frac{\partial\phi}{\partial x}+q\frac{\partial}{\partial x}\big(\upsilon_xA_x+\upsilon_yA_y+\upsilon_zA_z\big)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=-q\frac{\partial\phi}{\partial x}+q\left(\upsilon_x\frac{\partial A_x}{\partial x}+\upsilon_y\frac{\partial A_y}{\partial x}+\upsilon_z\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\cdots③$$

$$\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=0\qquad \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi}{\partial t}+\nabla\cdot\vec{A}=0\qquad \nabla\cdot\vec{A}=-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial x}=-\frac{\partial A_y}{\partial y}-\frac{\partial A_z}{\partial z}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi}{\partial t}\cdots④$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=-q\frac{\partial\phi}{\partial x}+q\left\{\upsilon_x\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\right)+\upsilon_y\frac{\partial A_y}{\partial x}+\upsilon_z\frac{\partial A_z}{\partial x}\right\}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=-q\frac{\partial\phi}{\partial x}+q\left\{\upsilon_x\left(-\frac{\partial A_y}{\partial y}-\frac{\partial A_z}{\partial z}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)+\upsilon_y\frac{\partial A_y}{\partial x}+\upsilon_z\frac{\partial A_z}{\partial x}\right\}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=-q\frac{\partial\phi}{\partial x}+q\left\{-\upsilon_x\frac{\partial A_y}{\partial y}-\upsilon_x\frac{\partial A_z}{\partial z}-\varepsilon_0\mu_0\upsilon_x\frac{\partial\phi}{\partial t}+\upsilon_y\frac{\partial A_y}{\partial x}+\upsilon_z\frac{\partial A_z}{\partial x}\right\}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=-q\frac{\partial \phi}{\partial x}+q\left\{\upsilon_y\frac{\partial A_y}{\partial x}-\upsilon_x\frac{\partial A_y}{\partial y}+\upsilon_z\frac{\partial A_z}{\partial x}-\upsilon_x\frac{\partial A_z}{\partial z}-\varepsilon_0\mu_0\upsilon_x\frac{\partial \phi}{\partial t}\right\}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=-q\frac{\partial \phi}{\partial x}+q\left\{\left(\upsilon_y\frac{\partial}{\partial x}-\upsilon_x\frac{\partial}{\partial y}\right)A_y+\left(\upsilon_z\frac{\partial}{\partial x}-\upsilon_x\frac{\partial}{\partial z}\right)A_z-\varepsilon_0\mu_0\upsilon_x\frac{\partial \phi}{\partial t}\right\}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=-q\frac{\partial \phi}{\partial x}+q\left\{\left(\upsilon_y\frac{\partial}{\partial x}-\upsilon_x\frac{\partial}{\partial y}\right)A_y+\left(\upsilon_z\frac{\partial}{\partial x}-\upsilon_x\frac{\partial}{\partial z}\right)A_z-\varepsilon_0\mu_0\upsilon_x\frac{\partial \phi}{\partial t}\right\}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=-q\frac{\partial \phi}{\partial x}+q\left\{-\left(\vec{\upsilon}\times\nabla\right)_z A_y+\left(\vec{\upsilon}\times\nabla\right)_y A_z-\varepsilon_0\mu_0\upsilon_x\frac{\partial \phi}{\partial t}\right\}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=q\left\{\left(\vec{\upsilon}\times\nabla\right)_y A_z-\left(\vec{\upsilon}\times\nabla\right)_z A_y\right\}-q\frac{\partial \phi}{\partial x}-\varepsilon_0\mu_0 q\upsilon_x\frac{\partial \phi}{\partial t}\cdots⑤$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=q\left\{\left(\vec{\upsilon}\times\nabla\right)\times\vec{A}\right\}_x-q\frac{\partial \phi}{\partial x}-\varepsilon_0\mu_0 q\upsilon_x\frac{\partial \phi}{\partial t}\cdots⑥$$

$\vec{A}\times\left(\vec{\upsilon}\times\nabla\right)+\vec{\upsilon}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)+\nabla\times\left(\vec{A}\times\vec{\upsilon}\right)=\vec{0}$ なので $\vec{A}\times\left(\vec{\upsilon}\times\nabla\right)=-\vec{\upsilon}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)-\nabla\times\left(\vec{A}\times\vec{\upsilon}\right)$

$\left(\vec{\upsilon}\times\nabla\right)\times\vec{A}=\vec{\upsilon}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)+\nabla\times\left(\vec{A}\times\vec{\upsilon}\right)$ を⑥に代入すると

$$\frac{\partial L}{\partial x}=q\left\{\vec{\upsilon}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)+\nabla\times\left(\vec{A}\times\vec{\upsilon}\right)\right\}_x-q\frac{\partial \phi}{\partial x}-\varepsilon_0\mu_0 q\upsilon_x\frac{\partial \phi}{\partial t}\cdots⑦$$

$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$ を代入すると

$$\frac{\partial L}{\partial x}=\left\{q\vec{\upsilon}\times\vec{B}+q\nabla\times\left(\vec{A}\times\vec{\upsilon}\right)\right\}_x-q\frac{\partial \phi}{\partial x}-\varepsilon_0\mu_0 q\upsilon_x\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

$\nabla\times\left(\vec{A}\times\vec{\upsilon}\right)=\left(\nabla\cdot\vec{\upsilon}\right)\vec{A}-\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)\vec{\upsilon}$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=\left\{q\vec{\upsilon}\times\vec{B}+q\left(\nabla\cdot\vec{\upsilon}\right)\vec{A}-q\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)\vec{\upsilon}\right\}_x-q\frac{\partial \phi}{\partial x}-\varepsilon_0\mu_0 q\upsilon_x\frac{\partial \phi}{\partial t}\cdots⑧$$

$\nabla\cdot\vec{\upsilon}=\frac{\partial \upsilon_x}{\partial x}+\frac{\partial \upsilon_y}{\partial y}+\frac{\partial \upsilon_z}{\partial z}=0$ $\quad\nabla\cdot\vec{A}=-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \phi}{\partial t}$ なので

$$\frac{\partial L}{\partial x}=\left\{q\vec{\upsilon}\times\vec{B}-q\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)\vec{\upsilon}\right\}_x-q\frac{\partial \phi}{\partial x}-\varepsilon_0\mu_0 q\upsilon_x\frac{\partial \phi}{\partial t}\cdots⑨$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=\left\{q\vec{\upsilon}\times\vec{B}-q\left(-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)\vec{\upsilon}\right\}_x-q\frac{\partial \phi}{\partial x}-\varepsilon_0\mu_0 q\upsilon_x\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=\left\{q\vec{\upsilon}\times\vec{B}+q\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \phi}{\partial t}\vec{\upsilon}\right\}_x-q\frac{\partial \phi}{\partial x}-\varepsilon_0\mu_0 q\upsilon_x\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=\left\{q\vec{\upsilon}\times\vec{B}+q\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \phi}{\partial t}\vec{\upsilon}\right\}_x-q\frac{\partial \phi}{\partial x}+\left\{-\varepsilon_0\mu_0 q\vec{\upsilon}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right\}_x$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=\left\{q\vec{\upsilon}\times\vec{B}+q\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi}{\partial t}\vec{\upsilon}\right\}_x+\left\{-q\nabla\phi\right\}_x+\left\{-\varepsilon_0\mu_0 q\vec{\upsilon}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right\}_x$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=\left\{q\vec{\upsilon}\times\vec{B}-q\nabla\phi+q\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi}{\partial t}\vec{\upsilon}-\varepsilon_0\mu_0 q\vec{\upsilon}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right\}_x\cdots⑩$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=\left\{q\vec{\upsilon}\times\vec{B}-q\nabla\phi\right\}_x\cdots⑪$$

②⑪をオイラー・ラグランジュ方程式⑫に代入すると

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right)=\frac{\partial L}{\partial x}\cdots⑫$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\upsilon_x+qA_x\right)=\left\{q\vec{\upsilon}\times\vec{B}-q\nabla\phi\right\}_x\cdots⑬$$

$$\left\{\frac{d\left(m\vec{\upsilon}\right)}{dt}\right\}_x=\left\{q\vec{\upsilon}\times\vec{B}-q\nabla\phi-q\frac{d\vec{A}}{dt}\right\}_x$$

$$\left\{\frac{d\left(m\vec{\upsilon}\right)}{dt}\right\}_x=\left\{q\vec{\upsilon}\times\vec{B}+q\left(-\nabla\phi-\frac{d\vec{A}}{dt}\right)\right\}_x$$

$$\left\{\frac{d\left(m\vec{\upsilon}\right)}{dt}\right\}_x=\left\{q\left(-\nabla\phi-\frac{d\vec{A}}{dt}\right)+q\vec{\upsilon}\times\vec{B}\right\}_x$$

$\vec{E}=-\nabla\phi-\frac{d\vec{A}}{dt}$ を代入すると

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)=q\vec{E}+q\vec{\upsilon}\times\vec{B}=q\left(\vec{E}+\vec{\upsilon}\times\vec{B}\right)\cdots⑭$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)=\frac{q\left(\vec{E}+\vec{\upsilon}\times\vec{B}\right)}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$$

固有時で微分する形式で表せば次式になる。右辺が電磁場から受ける力の**四元力**を表している。

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)=\frac{q\left(\vec{E}+\vec{\upsilon}\times\vec{B}\right)}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\cdots⑮$$

近日点の移動

特殊相対論的運動方程式より

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\vec{\upsilon}\right)=\vec{F} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)=\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}\ \cdot\cdot①$$

$$\vec{F}=-\frac{K}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$ と力を中心力をおくと‥② $$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)=\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}=-\frac{K}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{\upsilon}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)=-\frac{K}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{\upsilon}=-\frac{K}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\ \cdot\cdot③$$ を時間積分すると

$$\int_{t_0}^{t}\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)dt=-\int_{r_0}^{r}\frac{K}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}\cdot d\vec{r}=-\int_{r_0}^{r}\frac{K}{r^2}\frac{r}{r}\cdot dr=-\int_{r_0}^{r}\frac{K}{r^2}\cdot dr=\left[\frac{K}{r}\right]_{r_0}^{r}$$

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}-E_0=K\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right] \qquad \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}=K\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right]+E_0=\frac{K}{r}+E$$

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}=\left(\frac{K}{r}+E\right)^2 \qquad \frac{1}{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)}=\left(\frac{\frac{K}{r}+E}{m_0c^2}\right)^2\ \cdot\cdot④$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\vec{\upsilon}\right)\times\vec{r}=\vec{F}\times\vec{r}=\left(-\frac{K}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}\right)\times\vec{r}=\vec{0}$$ なので

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\times\vec{r}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)\times\vec{r}+\frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\times\vec{\upsilon}=\vec{0}$$

となり

$$\frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\times\vec{r}=\vec{h}$$

$$\frac{m_0\upsilon\cdot r\sin\varphi}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}=\left|\vec{h}\right|=h$$