特殊相対性理論

Special relativity

2024.2.17現在

鹿児島現代物理勉強会
御領　悟志

目　次

相対性理論とは

- 相対性理論は、量子力学とともに<u>現代物理学の根幹をなす基礎理論</u>である。
- <u>時間、空間を考えるとき概念的に重要</u>であるとともに、<u>高エネルギー現象を理解する上で必須となる実用的な理論</u>です。

- <u>ニュートン力学は相対論とは相いれず、力学には修正を必要と</u>するが、<u>電磁気学はもともと相対論と両立</u>する理論になっている。
- （日大理工のHP記載内容から）

特殊相対性理論を理解するには、高等学校で学習する微分積分を習得していれば十分である。

基本原理

- アインシュタインは、時間と空間について全く新しい考え方を提唱した。（1905年）
- 右の二つのことを基本原理として理論を構築する。
- マイケル・モーレーの実験などを経て、光速不変の原理は認めざるを得ないものとなった。

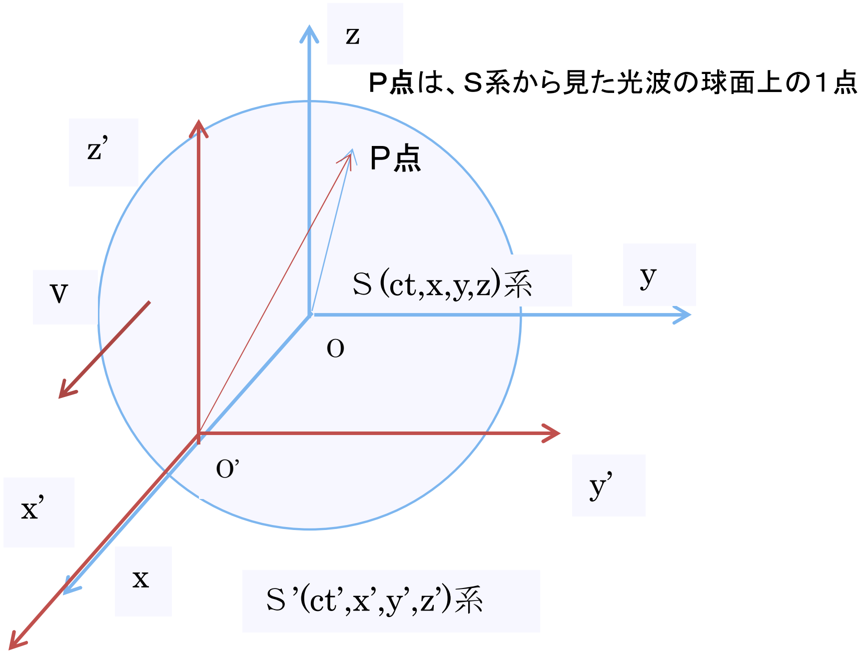
- いかなる慣性系においても<u>光速は不変</u>である。
- いかなる慣性系においても<u>物理法則は同等</u>に成り立つ。

・ **ローレンツ変換**を用いて、物理法則を書き換えたときに、<u>物理法則の内容・形式が両方の慣性系で同じであること</u>を要求する。

ローレンツ変換

異なる座標系の座標間の関係式は、一次式と考えられる。次の一次式を仮定する。

$$
\left[
\begin{aligned}
x' &= f(V)(x - Vt) \\
ct' &= g(V)x + h(V)ct \\
y' &= y \\
z' &= z
\end{aligned}
\right]
\quad \cdots (\square\ )
$$



OとO'が重なっているとき光が発せられたとする。光速不変の原理とどの慣性系でも物理法則は同等に成立することからS系(静止)とS'系(x軸方向にVで移動)においてそれぞれの慣性系で光は同じ速さで同様に球形に拡がって行くので次の式が成り立つ。

ローレンツ変換(計算過程１)

$$x^2+y^2+z^2-(ct)^2=0\cdots①$$ S系での光球の式

$$x'^2+y'^2+z'^2-(ct')^2=0\cdots②$$ S'系での光球の式

②式に前ページの関係を代入する。

$$f^2(x-Vt)^2+y^2+z^2-(gx+hct)^2$$

$$f^2x^2-2f^2xVt+f^2V^2t^2+y^2+z^2-g^2x^2-2ghxct-h^2c^2t^2$$

$$(f^2-g^2)x^2-2(ghc+f^2V)xt+y^2+z^2+(f^2V^2-h^2c^2)t^2\cdots③$$

①②が恒等式であるための条件としては

$$f^2-g^2=1 \qquad ghc+f^2V=0 \qquad f^2V^2-h^2c^2=-c^2\cdots⑥$$

$$g^2=f^2-1\cdots④$$

$$gh+f^2\frac{V}{c}=0$$

$\beta=\dfrac{V}{c}$ とおくと

$$gh+f^2\beta=0\cdots⑤$$

$$f^2V^2-h^2c^2=-c^2$$

$$f^2\frac{V^2}{c^2}-h^2=-1$$

$$h^2-f^2\beta^2=1$$

$$h^2=1+f^2\beta^2\cdots⑦$$

$$gh=-f^2\beta$$

$$g^2h^2=f^4\beta^2$$

$$h^2=\frac{\beta^2}{g^2}f^4$$

⑦式に④式を代入すると

$$\frac{\beta^2}{g^2}f^4=1+f^2\beta^2$$

$$\frac{\beta^2}{f^2-1}f^4=1+f^2\beta^2$$

$$\beta^2f^4=(1+f^2\beta^2)(f^2-1)\cdots⑧$$

⑧式を展開すると

$$\beta^2f^4=f^2-1+f^4\beta^2-f^2\beta^2$$

$$1=f^2(1-\beta^2)$$

$$f^2=\frac{1}{(1-\beta^2)}$$

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdots⑨$$

$$f^2=\gamma^2$$

$$g^2=f^2-1=\gamma^2-1$$

$$=\frac{1}{1-\beta^2}-1=\frac{1-(1-\beta^2)}{1-\beta^2}$$

$$=\frac{\beta^2}{1-\beta^2}=\beta^2\gamma^2\cdots⑨$$

$$h^2=\frac{\beta^2}{g^2}f^4=\frac{\beta^2}{\beta^2\gamma^2}\gamma^4=\gamma^2\cdots⑩$$

ローレンツ変換（計算過程2）

$f^2=h^2=\gamma^2 \quad g^2=\beta^2\gamma^2$

$x\to\infty$ のとき $x'\to\infty$

$\therefore f>0 \qquad f=\gamma \cdots ⑪$

$t\to\infty$ のとき $t'\to\infty$

$\therefore h>0 \qquad h=\gamma \cdots ⑫$

$gh+f^2\beta=0 \cdots ⑤$

$g\gamma+\gamma^2\beta=0$

$g=-\gamma\beta \cdots ⑬$

$$\left[\begin{aligned} x' &= f(V)(x-Vt)\\ ct' &= g(V)x+h(V)ct\\ y' &= y\\ z' &= z \end{aligned}\right] \cdots ⑬$$

$$\left[\begin{aligned} x' &= \gamma(x-Vt)\\ ct' &= -\gamma\beta x+\gamma ct=\gamma(-\beta x+ct)\\ y' &= y\\ z' &= z \end{aligned}\right] \cdots ⑭$$

次のように式の順番を入れ替えると

$$\left[\begin{aligned} ct' &= -\gamma\beta x+\gamma ct=\gamma ct-\gamma\beta x\\ x' &= -\gamma\beta ct+\gamma x\\ y' &= y\\ z' &= z \end{aligned}\right] \cdots ⑮$$

$\beta=\dfrac{V}{c}$

$\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$\gamma^2(1-\beta^2)=1$

行列を用いて表すと4行4列の正方行列となる

$$\begin{bmatrix} ct'\\ x'\\ y'\\ z' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0\\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ct\\ x\\ y\\ z \end{bmatrix} \cdots ⑯$$

ローレンツ変換（計算過程3）

$$ct' = -\gamma\beta x + \gamma ct = \gamma ct - \gamma\beta x \cdots ⑰$$

$$x' = -\gamma\beta ct + \gamma x \cdots ⑱$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$\gamma\beta x' = -\gamma^2\beta^2 ct + \gamma^2\beta x \cdots ⑱ \times \gamma\beta$$

$$\gamma ct' = \gamma^2 ct - \gamma^2\beta x \cdots ⑰ \times \gamma$$

$$\gamma ct' + \gamma\beta x' = -\gamma^2\beta^2 ct + \gamma^2 ct = ct\gamma^2\left(1-\beta^2\right) = ct$$

$$\gamma x' = -\gamma^2\beta ct + \gamma^2 x \cdots ⑱ \times \gamma$$

$$\gamma\beta ct' = \gamma^2\beta ct - \gamma^2\beta^2 x \cdots ⑰ \times \beta\gamma$$

$$\gamma x' + \gamma\beta ct' = \gamma^2 x - \gamma^2\beta^2 x = x\gamma^2\left(1-\beta^2\right) = x$$

次のように式の順番を入れ替えると

$$\left[\begin{aligned} ct &= \gamma ct' + \gamma\beta x' \\ x &= \gamma\beta ct' + \gamma x' \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned}\right] \cdots ⑲$$

$$\beta = \frac{V}{c}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\gamma^2\left(1-\beta^2\right) = 1$$

行列を用いて表すと4行4列の正方行列となる

$$\begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \cdots ⑳$$

ローレンツ変換(1)

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \cdots①$$

$$\beta = \frac{V}{c}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

ローレンツ変換(2)

$$\begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad \cdots ②$$

$$\beta = \frac{V}{c}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

ローレンツ変換(性質1)

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \cdots ①$$

$$\begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \cdots ②$$

②に①を右辺に代入すると

$$\begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \cdots ③$$

従って次の④の関係が成りたっているはずである

$$\begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdots ④$$

ローレンツ変換(性質2)

④の関係を確かめると

$$\begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \gamma^2\left(1-\beta^2\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma^2\left(1-\beta^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

行列L'とLの積が単位行列となるので、お互いが逆行列となり次の関係式が成り立つ。

$$L=\begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad L'=L^{-1}=\begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad L'L=I=L^{-1}L \quad \cdots⑤$$

ローレンツ変換(性質3)

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{X'} = L\vec{X} \quad \cdots ⑥$$

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad L^{-1} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{X} = L^{-1}\vec{X'} \quad \cdots ⑦$$

速度の合成(1)

ローレンツ変換から

$$cdt' = -\gamma\beta dx + \gamma cdt = \gamma cdt - \gamma\frac{V}{c}dx$$

$$dt' = -\gamma\beta\frac{1}{c}dx + \gamma dt = \gamma\left(dt - \frac{V}{c^2}dx\right)$$

$$dx' = \gamma\left(dx - \frac{V}{c}cdt\right) = \gamma(dx - Vdt)$$

$$dy' = dy$$

$$dz' = dz$$

$$\beta = \frac{V}{c} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

S'系における速度をS系の速度で表すと

$$\upsilon_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - Vdt)}{\gamma\left(dt - \frac{V}{c^2}dx\right)} = \frac{\left(\frac{dx}{dt} - V\right)}{\left(1 - \frac{V}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{\upsilon_x - V}{1 - \frac{V}{c^2}\upsilon_x}$$

$$\upsilon_y' = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma\left(dt - \frac{V}{c^2}dx\right)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\gamma\left(1 - \frac{V}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{\upsilon_y}{\gamma\left(1 - \frac{V}{c^2}\upsilon_x\right)}$$

$$\upsilon_z' = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\gamma\left(dt - \frac{V}{c^2}dx\right)} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\gamma\left(1 - \frac{V}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{\upsilon_z}{\gamma\left(1 - \frac{V}{c^2}\upsilon_x\right)}$$

速度の合成(2)

ローレンツ変換から

$$cdt = \gamma\beta dx' + \gamma cdt' = \gamma cdt' + \gamma \frac{V}{c} dx'$$

$$dt = \gamma\beta \frac{1}{c} dx' + \gamma dt' = \gamma\left(dt' + \frac{V}{c^2} dx' \right)$$

$$dx = \gamma\left(dx' + \frac{V}{c} cdt' \right) = \gamma\left(dx' + Vdt'\right)$$

$$dy = dy'$$

$$dz = dz'$$

$$\beta = \frac{V}{c} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

S系における速度をS'系の速度で表すと

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma\left(dx' + Vdt'\right)}{\gamma\left(dt' + \frac{V}{c^2} dx' \right)} = \frac{\left(\frac{dx'}{dt'} + V \right)}{\left(1 + \frac{V}{c^2}\frac{dx'}{dt'} \right)} = \frac{\upsilon_x' + V}{1 + \frac{V}{c^2}\upsilon_x'}$$

$$\upsilon_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma\left(dt' + \frac{V}{c^2} dx' \right)} = \frac{\frac{dy'}{dt'}}{\gamma\left(1 + \frac{V}{c^2}\frac{dx'}{dt'} \right)} = \frac{\upsilon_y'}{\gamma\left(1 + \frac{V}{c^2}\upsilon_x' \right)}$$

$$\upsilon_z = \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{\gamma\left(dt' + \frac{V}{c^2} dx' \right)} = \frac{\frac{dz'}{dt'}}{\gamma\left(1 + \frac{V}{c^2}\frac{dx'}{dt'} \right)} = \frac{\upsilon_z'}{\gamma\left(1 + \frac{V}{c^2}\upsilon_x' \right)}$$

速度の合成(3)

S’系における速度をS系の速度で表すと

$$\upsilon_x' = \frac{\upsilon_x - V}{1 - \frac{V}{c^2}\upsilon_x}$$

$$\upsilon_y' = \frac{\upsilon_y}{\gamma\left(1 - \frac{V}{c^2}\upsilon_x\right)}$$

$$\upsilon_z' = \frac{\upsilon_z}{\gamma\left(1 - \frac{V}{c^2}\upsilon_x\right)}$$

S系における速度をS’系の速度で表すと

$$\upsilon_x = \frac{\upsilon_x' + V}{1 + \frac{V}{c^2}\upsilon_x'}$$

$$\upsilon_y = \frac{\upsilon_y'}{\gamma\left(1 + \frac{V}{c^2}\upsilon_x'\right)}$$

$$\upsilon_z = \frac{\upsilon_z'}{\gamma\left(1 + \frac{V}{c^2}\upsilon_x'\right)}$$

速度の合成(3)−1

$$\upsilon_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\upsilon_x - V}{1 - \dfrac{V}{c^2}\upsilon_x}$$

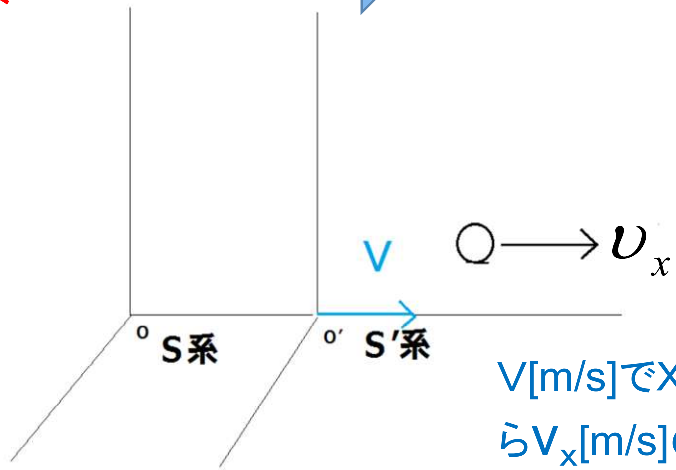
$V \ll c \qquad \upsilon_x \ll c$

光速cよりはるかに低速なときは

$$\frac{\upsilon_x}{c} \to 0 \qquad \frac{V}{c} \to 0$$

$$\upsilon_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\upsilon_x - V}{1 - \dfrac{V}{c}\dfrac{\upsilon_x}{c}} \fallingdotseq \upsilon_x - V$$

ガリレオ変換に近似する！



V[m/s]でX軸の正の向きに移動しているS'系からV_x[m/s]の小球の速度を観測する。

速度の合成(3)ー2

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\upsilon_x' + V}{1 + \frac{V}{c^2}\upsilon_x'}$$

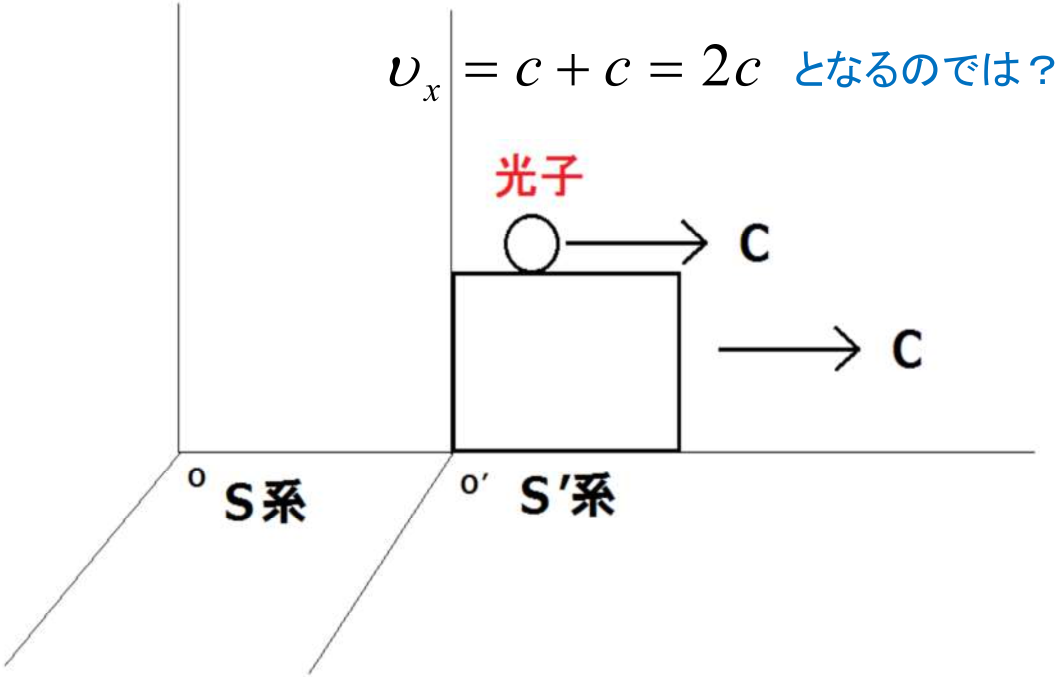
x軸上を正の向きに光速Cで移動する物体
の上から光をx軸の正の向きに発した。
その光子の速さを地上で観測する。

$\upsilon_x' = c \qquad V = c$

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \frac{c+c}{1 + \frac{c}{c^2}c} = \frac{c+c}{2} = c$$

光速はやはりCと観測されることを示す。

$\upsilon_x = c + c = 2c$ となるのでは？



加速度の合成（１）

ローレンツ変換から

$$cdt' = -\gamma\beta dx + \gamma cdt = \gamma cdt - \gamma\frac{V}{c}dx$$

$$dt' = -\gamma\beta\frac{1}{c}dx + \gamma dt = \gamma\left(dt - \frac{V}{c^2}dx\right)$$

$$dt' = \gamma dt\left(1 - \frac{V}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)$$

$$\frac{dt'}{dt} = \gamma\left(1 - \frac{V}{c^2}\upsilon_x\right)$$

$$\beta = \frac{V}{c} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

S'系における加速度をS系の加速度で表すと

$$a_x' = \frac{d\upsilon_x'}{dt'} = \frac{d\upsilon_x'}{dt}\frac{dt}{dt'} = \frac{\dfrac{d\upsilon_x'}{dt}}{\dfrac{dt'}{dt}} = \frac{1}{\gamma\left(1-\dfrac{V}{c^2}\upsilon_x\right)}\frac{d}{dt}\left(\frac{\upsilon_x - V}{1-\dfrac{V}{c^2}\upsilon_x}\right)$$

$$a_x' = \frac{1}{\gamma\left(1-\dfrac{V}{c^2}\upsilon_x\right)}\frac{1}{\left(1-\dfrac{V}{c^2}\upsilon_x\right)^2}\left\{\frac{d\upsilon_x}{dt}\left(1-\frac{V}{c^2}\upsilon_x\right) - (\upsilon_x - V)\left(-\frac{V}{c^2}\frac{d\upsilon_x}{dt}\right)\right\}$$

$$a_x' = \frac{1}{\gamma\left(1-\dfrac{V}{c^2}\upsilon_x\right)^3}\left\{\frac{d\upsilon_x}{dt}\left(1-\frac{V}{c^2}\upsilon_x\right) + \frac{d\upsilon_x}{dt}\left(\frac{V}{c^2}\upsilon_x - \frac{V^2}{c^2}\right)\right\}$$

$$\boxed{a_x' = \frac{1}{\gamma\left(1-\dfrac{V}{c^2}\upsilon_x\right)^3}\left\{\frac{d\upsilon_x}{dt}\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)\right\} = \frac{1}{\gamma\left(1-\dfrac{V}{c^2}\upsilon_x\right)^3}\frac{1}{\gamma^2}\frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{a_x}{\gamma^3\left(1-\dfrac{V}{c^2}\upsilon_x\right)^3}}$$

加速度の合成(2)

ローレンツ変換から

$$\upsilon_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - Vdt)}{\gamma\left(dt - \frac{V}{c^2}dx\right)} = \frac{\left(\frac{dx}{dt} - V\right)}{\left(1 - \frac{V}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{\upsilon_x - V}{1 - \frac{V}{c^2}\upsilon_x}$$

$$\upsilon_y' = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma\left(dt - \frac{V}{c^2}dx\right)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\gamma\left(1 - \frac{V}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{\upsilon_y}{\gamma\left(1 - \frac{V}{c^2}\upsilon_x\right)}$$

$$\upsilon_z' = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\gamma\left(dt - \frac{V}{c^2}dx\right)} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\gamma\left(1 - \frac{V}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{\upsilon_z}{\gamma\left(1 - \frac{V}{c^2}\upsilon_x\right)}$$

S’系における加速度をS系の加速度で表すと

$$a_y' = \frac{d\upsilon_y'}{dt'} = \frac{d\upsilon_y'}{dt}\frac{dt}{dt'} = \frac{\frac{d\upsilon_y'}{dt}}{\frac{dt'}{dt}} = \frac{1}{\gamma\left(1 - \frac{V}{c^2}\upsilon_x\right)}\frac{d}{dt}\left(\frac{\upsilon_y}{\gamma\left(1 - \frac{V}{c^2}\upsilon_x\right)}\right)$$

$$a_y' = \frac{1}{\gamma^2\left(1 - \frac{V}{c^2}\upsilon_x\right)}\frac{1}{\left(1 - \frac{V}{c^2}\upsilon_x\right)^2}\left\{\frac{d\upsilon_y}{dt}\left(1 - \frac{V}{c^2}\upsilon_x\right) - \upsilon_y\left(-\frac{V}{c^2}\frac{d\upsilon_x}{dt}\right)\right\}$$

$$a_y' = \frac{1}{\gamma^2\left(1 - \frac{V}{c^2}\upsilon_x\right)^3}\left\{\frac{d\upsilon_y}{dt}\left(1 - \frac{V}{c^2}\upsilon_x\right) - \upsilon_y\left(-\frac{V}{c^2}\frac{d\upsilon_x}{dt}\right)\right\}$$

$$a_y' = \frac{1}{\gamma^2\left(1 - \frac{V}{c^2}\upsilon_x\right)^2}\left\{\frac{d\upsilon_y}{dt}\right\} + \frac{\upsilon_y}{\gamma^2\left(1 - \frac{V}{c^2}\upsilon_x\right)^3}\left\{\frac{V}{c^2}\frac{d\upsilon_x}{dt}\right\}$$

$$a_y' = \frac{1}{\gamma^2}\left\{\frac{1}{\left(1 - \frac{V}{c^2}\upsilon_x\right)^2}\frac{d\upsilon_y}{dt} + \frac{\upsilon_y}{\left(1 - \frac{V}{c^2}\upsilon_x\right)^3}\frac{V}{c^2}\frac{d\upsilon_x}{dt}\right\}$$

$$\boxed{a_y' = \frac{1}{\gamma^2}\left\{\frac{1}{\left(1 - \frac{V}{c^2}\upsilon_x\right)^2}a_y + \frac{\upsilon_y}{\left(1 - \frac{V}{c^2}\upsilon_x\right)^3}\frac{V}{c^2}a_x\right\}}$$

加速度の合成(3)

ローレンツ変換から

$$\upsilon_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - Vdt)}{\gamma\left(dt - \frac{V}{c^2}dx\right)} = \frac{\left(\frac{dx}{dt} - V\right)}{\left(1 - \frac{V}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{\upsilon_x - V}{1 - \frac{V}{c^2}\upsilon_x}$$

$$\upsilon_y' = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma\left(dt - \frac{V}{c^2}dx\right)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\gamma\left(1 - \frac{V}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{\upsilon_y}{\gamma\left(1 - \frac{V}{c^2}\upsilon_x\right)}$$

$$\upsilon_z' = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\gamma\left(dt - \frac{V}{c^2}dx\right)} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\gamma\left(1 - \frac{V}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{\upsilon_z}{\gamma\left(1 - \frac{V}{c^2}\upsilon_x\right)}$$

S’系における加速度をS系の加速度で表すと

$$a_z' = \frac{d\upsilon_z'}{dt'} = \frac{d\upsilon_z'}{dt}\frac{dt}{dt'} = \frac{\frac{d\upsilon_z'}{dt}}{\frac{dt'}{dt}} = \frac{1}{\gamma\left(1 - \frac{V}{c^2}\upsilon_x\right)}\frac{d}{dt}\left(\frac{\upsilon_z}{\gamma\left(1 - \frac{V}{c^2}\upsilon_x\right)}\right)$$

$$a_z' = \frac{1}{\gamma^2\left(1 - \frac{V}{c^2}\upsilon_x\right)}\frac{1}{\left(1 - \frac{V}{c^2}\upsilon_x\right)^2}\left\{\frac{d\upsilon_z}{dt}\left(1 - \frac{V}{c^2}\upsilon_x\right) - \upsilon_z\left(-\frac{V}{c^2}\frac{d\upsilon_x}{dt}\right)\right\}$$

$$a_z' = \frac{1}{\gamma^2\left(1 - \frac{V}{c^2}\upsilon_x\right)^3}\left\{\frac{d\upsilon_z}{dt}\left(1 - \frac{V}{c^2}\upsilon_x\right) - \upsilon_z\left(-\frac{V}{c^2}\frac{d\upsilon_x}{dt}\right)\right\}$$

$$a_z' = \frac{1}{\gamma^2\left(1 - \frac{V}{c^2}\upsilon_x\right)^2}\left\{\frac{d\upsilon_z}{dt}\right\} + \frac{\upsilon_z}{\gamma^2\left(1 - \frac{V}{c^2}\upsilon_x\right)^3}\left\{\frac{V}{c^2}\frac{d\upsilon_x}{dt}\right\}$$

$$a_z' = \frac{1}{\gamma^2}\left\{\frac{1}{\left(1 - \frac{V}{c^2}\upsilon_x\right)^2}\frac{d\upsilon_z}{dt} + \frac{\upsilon_z}{\left(1 - \frac{V}{c^2}\upsilon_x\right)^3}\frac{V}{c^2}\frac{d\upsilon_x}{dt}\right\}$$

$$\boxed{a_z' = \frac{1}{\gamma^2}\left\{\frac{1}{\left(1 - \frac{V}{c^2}\upsilon_x\right)^2}a_z + \frac{\upsilon_z}{\left(1 - \frac{V}{c^2}\upsilon_x\right)^3}\frac{V}{c^2}a_x\right\}}$$

加速度の合成(4)

S’系における加速度をS系の加速度で表すと

$$a_x' = \frac{a_x}{\gamma^3\left(1 - \frac{V}{c^2}\upsilon_x\right)^3}$$

$$a_y' = \frac{1}{\gamma^2}\left\{\frac{1}{\left(1 - \frac{V}{c^2}\upsilon_x\right)^2}a_y + \frac{\upsilon_y}{\left(1 - \frac{V}{c^2}\upsilon_x\right)^3}\frac{V}{c^2}a_x\right\}$$

$$a_z' = \frac{1}{\gamma^2}\left\{\frac{1}{\left(1 - \frac{V}{c^2}\upsilon_x\right)^2}a_z + \frac{\upsilon_z}{\left(1 - \frac{V}{c^2}\upsilon_x\right)^3}\frac{V}{c^2}a_x\right\}$$

加速度の合成(5)

ローレンツ変換から

$$cdt = \gamma\beta dx' + \gamma cdt' = \gamma cdt' + \gamma \frac{V}{c} dx'$$

$$dt = \gamma\beta \frac{1}{c} dx' + \gamma dt' = \gamma\left(dt' + \frac{V}{c^2} dx' \right)$$

$$dt = \gamma dt' \left(1 + \frac{V}{c^2} \frac{dx'}{dt'} \right)$$

$$\frac{dt}{dt'} = \gamma\left(1 + \frac{V}{c^2} \upsilon_x' \right)$$

$$\beta = \frac{V}{c} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

S系における速度をS'系の速度で表すと

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\upsilon_x' + V}{1 + \frac{V}{c^2}\upsilon_x'}$$

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d\upsilon_x}{dt'}\frac{dt'}{dt} = \frac{\frac{d\upsilon_x}{dt'}}{\frac{dt}{dt'}} = \frac{1}{\gamma\left(1 + \frac{V}{c^2}\upsilon_x'\right)} \frac{d}{dt'}\left(\frac{\upsilon_x' + V}{1 + \frac{V}{c^2}\upsilon_x'} \right)$$

$$a_x = \frac{1}{\gamma\left(1 + \frac{V}{c^2}\upsilon_x'\right)} \frac{1}{\left(1 + \frac{V}{c^2}\upsilon_x'\right)^2} \left\{ \frac{d\upsilon_x'}{dt'}\left(1 + \frac{V}{c^2}\upsilon_x'\right) - \left(\upsilon_x' + V\right)\left(\frac{V}{c^2}\frac{d\upsilon_x'}{dt'}\right) \right\}$$

$$a_x = \frac{1}{\gamma\left(1 + \frac{V}{c^2}\upsilon_x'\right)^3} \left\{ \frac{d\upsilon_x'}{dt'}\left(1 + \frac{V}{c^2}\upsilon_x'\right) + \frac{d\upsilon_x'}{dt'}\left(-\frac{V}{c^2}\upsilon_x' - \frac{V^2}{c^2}\right) \right\}$$

$$a_x = \frac{1}{\gamma\left(1 + \frac{V}{c^2}\upsilon_x'\right)^3} \left\{ \frac{d\upsilon_x'}{dt'}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \right\} = \frac{1}{\gamma\left(1 + \frac{V}{c^2}\upsilon_x'\right)^3} \frac{1}{\gamma^2} a_x'$$

$$\boxed{a_x = \frac{1}{\gamma^3\left(1 + \frac{V}{c^2}\upsilon_x'\right)^3} a_x'}$$

加速度の合成(6)

ローレンツ変換から

$$\upsilon_x=\frac{dx}{dt}=\frac{\gamma(dx'+Vdt')}{\gamma\left(dt'+\frac{V}{c^2}dx'\right)}=\frac{\left(\frac{dx'}{dt'}+V\right)}{\left(1+\frac{V}{c^2}\frac{dx'}{dt'}\right)}=\frac{\upsilon_x'+V}{1+\frac{V}{c^2}\upsilon_x'}$$

$$\upsilon_y=\frac{dy}{dt}=\frac{dy'}{\gamma\left(dt'+\frac{V}{c^2}dx'\right)}=\frac{\frac{dy'}{dt'}}{\gamma\left(1+\frac{V}{c^2}\frac{dx'}{dt'}\right)}=\frac{\upsilon_y'}{\gamma\left(1+\frac{V}{c^2}\upsilon_x'\right)}$$

$$\upsilon_z=\frac{dz}{dt}=\frac{dz'}{\gamma\left(dt'+\frac{V}{c^2}dx'\right)}=\frac{\frac{dz'}{dt'}}{\gamma\left(1+\frac{V}{c^2}\frac{dx'}{dt'}\right)}=\frac{\upsilon_z'}{\gamma\left(1+\frac{V}{c^2}\upsilon_x'\right)}$$

S系における加速度をS'系の加速度で表すと

$$a_y=\frac{d\upsilon_y}{dt}=\frac{d\upsilon_y}{dt'}\frac{dt'}{dt}=\frac{\frac{d\upsilon_y}{dt'}}{\frac{dt}{dt'}}=\frac{1}{\gamma\left(1+\frac{V}{c^2}\upsilon_x'\right)}\frac{d}{dt'}\left(\frac{\upsilon_y'}{\gamma\left(1+\frac{V}{c^2}\upsilon_x'\right)}\right)$$

$$a_y=\frac{1}{\gamma^2\left(1+\frac{V}{c^2}\upsilon_x'\right)}\frac{1}{\left(1+\frac{V}{c^2}\upsilon_x'\right)^2}\left\{\frac{d\upsilon_y'}{dt'}\left(1+\frac{V}{c^2}\upsilon_x'\right)-\upsilon_y'\left(\frac{V}{c^2}\frac{d\upsilon_x'}{dt'}\right)\right\}$$

$$a_y=\frac{1}{\gamma^2\left(1+\frac{V}{c^2}\upsilon_x'\right)^3}\left\{\frac{d\upsilon_y'}{dt'}\left(1+\frac{V}{c^2}\upsilon_x'\right)-\upsilon_y'\left(\frac{V}{c^2}\frac{d\upsilon_x'}{dt'}\right)\right\}$$

$$a_y=\frac{1}{\gamma^2\left(1+\frac{V}{c^2}\upsilon_x'\right)^2}\left\{\frac{d\upsilon_y'}{dt'}\right\}-\frac{\upsilon_y'}{\gamma^2\left(1+\frac{V}{c^2}\upsilon_x'\right)^3}\left\{\frac{V}{c^2}\frac{d\upsilon_x'}{dt'}\right\}$$

$$a_y=\frac{1}{\gamma^2}\left\{\frac{1}{\left(1+\frac{V}{c^2}\upsilon_x'\right)^2}\frac{d\upsilon_y'}{dt'}-\frac{\upsilon_y'}{\left(1+\frac{V}{c^2}\upsilon_x'\right)^3}\frac{V}{c^2}\frac{d\upsilon_x'}{dt'}\right\}$$

$$\boxed{a_y=\frac{1}{\gamma^2}\left\{\frac{1}{\left(1+\frac{V}{c^2}\upsilon_x'\right)^2}a_y'-\frac{\upsilon_y'}{\left(1+\frac{V}{c^2}\upsilon_x'\right)^3}\frac{V}{c^2}a_x'\right\}}$$

加速度の合成(7)

ローレンツ変換から

$$\upsilon_x=\frac{dx}{dt}=\frac{\gamma(dx'+Vdt')}{\gamma\left(dt'+\frac{V}{c^2}dx'\right)}=\frac{\left(\frac{dx'}{dt'}+V\right)}{\left(1+\frac{V}{c^2}\frac{dx'}{dt'}\right)}=\frac{\upsilon_x'+V}{1+\frac{V}{c^2}\upsilon_x'}$$

$$\upsilon_y=\frac{dy}{dt}=\frac{dy'}{\gamma\left(dt'+\frac{V}{c^2}dx'\right)}=\frac{\frac{dy'}{dt'}}{\gamma\left(1+\frac{V}{c^2}\frac{dx'}{dt'}\right)}=\frac{\upsilon_y'}{\gamma\left(1+\frac{V}{c^2}\upsilon_x'\right)}$$

$$\upsilon_z=\frac{dz}{dt}=\frac{dz'}{\gamma\left(dt'+\frac{V}{c^2}dx'\right)}=\frac{\frac{dz'}{dt'}}{\gamma\left(1+\frac{V}{c^2}\frac{dx'}{dt'}\right)}=\frac{\upsilon_z'}{\gamma\left(1+\frac{V}{c^2}\upsilon_x'\right)}$$

S系における加速度をS'系の加速度で表すと

$$a_z=\frac{d\upsilon_z}{dt}=\frac{d\upsilon_z}{dt'}\frac{dt'}{dt}=\frac{\frac{d\upsilon_z}{dt'}}{\frac{dt}{dt'}}=\frac{1}{\gamma\left(1+\frac{V}{c^2}\upsilon_x'\right)}\frac{d}{dt'}\left(\frac{\upsilon_z'}{\gamma\left(1+\frac{V}{c^2}\upsilon_x'\right)}\right)$$

$$a_z=\frac{1}{\gamma^2\left(1+\frac{V}{c^2}\upsilon_x'\right)}\frac{1}{\left(1+\frac{V}{c^2}\upsilon_x'\right)^2}\left\{\frac{d\upsilon_z'}{dt'}\left(1+\frac{V}{c^2}\upsilon_x'\right)-\upsilon_z'\left(\frac{V}{c^2}\frac{d\upsilon_x'}{dt'}\right)\right\}$$

$$a_z=\frac{1}{\gamma^2\left(1+\frac{V}{c^2}\upsilon_x'\right)^3}\left\{\frac{d\upsilon_z'}{dt'}\left(1+\frac{V}{c^2}\upsilon_x'\right)-\upsilon_z'\left(\frac{V}{c^2}\frac{d\upsilon_x'}{dt'}\right)\right\}$$

$$a_z=\frac{1}{\gamma^2\left(1+\frac{V}{c^2}\upsilon_x'\right)^2}\left\{\frac{d\upsilon_z'}{dt'}\right\}-\frac{\upsilon_z'}{\gamma^2\left(1+\frac{V}{c^2}\upsilon_x'\right)^3}\left\{\frac{V}{c^2}\frac{d\upsilon_x'}{dt'}\right\}$$

$$a_z=\frac{1}{\gamma^2}\left\{\frac{1}{\left(1+\frac{V}{c^2}\upsilon_x'\right)^2}\frac{d\upsilon_z'}{dt'}-\frac{\upsilon_z'}{\left(1+\frac{V}{c^2}\upsilon_x'\right)^3}\frac{V}{c^2}\frac{d\upsilon_x'}{dt'}\right\}$$

$$\boxed{a_z=\frac{1}{\gamma^2}\left\{\frac{1}{\left(1+\frac{V}{c^2}\upsilon_x'\right)^2}a_z'-\frac{\upsilon_z'}{\left(1+\frac{V}{c^2}\upsilon_x'\right)^3}\frac{V}{c^2}a_x'\right\}}$$

加速度の合成(8)

S系における加速度をS'系の加速度で表すと

$$a_x = \frac{a_x'}{\gamma^3\left(1+\frac{V}{c^2}\upsilon_x'\right)^3}$$

$$a_y = \frac{1}{\gamma^2}\left\{\frac{1}{\left(1+\frac{V}{c^2}\upsilon_x'\right)^2}a_y' - \frac{\upsilon_y'}{\left(1+\frac{V}{c^2}\upsilon_x'\right)^3}\frac{V}{c^2}a_x'\right\}$$

$$a_z = \frac{1}{\gamma^2}\left\{\frac{1}{\left(1+\frac{V}{c^2}\upsilon_x'\right)^2}a_z' - \frac{\upsilon_z'}{\left(1+\frac{V}{c^2}\upsilon_x'\right)^3}\frac{V}{c^2}a_x'\right\}$$

等加速度での星間移動(1)

S系における加速度をS'系の加速度で表すと

$$a_x = \frac{a_x{}'}{\gamma^3\left(1+\dfrac{V}{c^2}\upsilon_x{}'\right)^3} \quad \cdot\cdot①$$

一直線上(x軸上)を運動するロケットがいつも静止して観測される瞬間静止座標系S'系から見て一定の加速度α'で飛行して星間移動したとする。

$$\upsilon_x{}' = 0 \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$a_x = \alpha'\left(1-\frac{\upsilon_x{}^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \cdot\cdot②$$

$$\upsilon_x{}' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\upsilon_x - V}{1-\dfrac{V}{c^2}\upsilon_x}$$ なので

$$\upsilon_x = V \quad \cdot\cdot③$$ x軸上のみの運動なので

$$a = \alpha'\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \cdot\cdot④$$

ロケット内での時間dt'と地上時間dtの関係は

$$dt' = \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\,dt \quad \cdot\cdot⑤$$

等加速度での星間移動(2)

Lをロケットの飛行距離とし、この間のロケット内での経過時間をT'とする。

$$L = \int_0^T V dt \quad T' = \int dt' = \int_0^T \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} dt \quad \cdots ⑥$$

地上座標系Sでの速度変化dVと経過時間dtの関係は加速度aの定義から

$$dV = a dt = \alpha' \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} dt \quad \cdots ⑦$$

$$dt = \frac{dV}{\alpha' \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

ロケット内での経過時間T'の関係は

$$T' = \int_0^T \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} dt = \int_0^V \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \frac{dV}{\alpha' \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$T' = \frac{1}{\alpha'} \int_0^V \frac{dV}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)} = \frac{1}{\alpha'} \int_0^V \frac{dV}{\left(1 + \frac{V}{c}\right)\left(1 - \frac{V}{c}\right)}$$

$$T' = \frac{1}{2\alpha'} \left\{ \int_0^V \frac{dV}{\left(1 + \frac{V}{c}\right)} + \int_0^V \frac{dV}{\left(1 - \frac{V}{c}\right)} \right\}$$

等加速度での星間移動(3)

$$T' = \frac{1}{2\alpha'}\left\{c\log\left(1+\frac{V}{c}\right)-c\log\left(1-\frac{V}{c}\right)\right\}$$

速度V_1に到達するまでの時間T'は次の通りとなる。

$$T' = \frac{c}{2\alpha'}\log\frac{\left(1+\frac{V}{c}\right)}{\left(1-\frac{V}{c}\right)} \quad \cdot\cdot ⑧$$

またその時のロケットの移動距離Lは、積分より

$$L = \int_0^T Vdt = \int_0^V \frac{VdV}{\alpha'\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\alpha'}\int_0^V \frac{VdV}{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

また置換積分すると

$$y = 1-\frac{V^2}{c^2} \quad dy = -\frac{2VdV}{c^2} \quad VdV = -\frac{c^2}{2}dy$$

$$L = \frac{1}{\alpha'}\int_0^{1-\frac{V_1^2}{c^2}} \frac{\left(-c^2\right)dy}{2y^{\frac{3}{2}}} = -\frac{c^2}{2\alpha'}\int_0^{1-\frac{V_1^2}{c^2}} y^{-\frac{3}{2}}dy \quad \cdot\cdot ⑨$$

$$L = -\frac{c^2}{2\alpha'}\frac{y^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C' = \frac{c^2}{\alpha'}y^{-\frac{1}{2}} + C'$$

$$L = \frac{c^2}{\alpha'\sqrt{1-\frac{V_1^2}{c^2}}} + C'$$

V=0のときL=0なので

$$0 = \frac{c^2}{\alpha'} + C'$$

等加速度での星間移動(4)

$$L=\frac{c^2}{\alpha'\sqrt{1-\frac{V_1^2}{c^2}}}+C'=\frac{c^2}{\alpha'\sqrt{1-\frac{V_1^2}{c^2}}}-\frac{c^2}{\alpha'}$$

$$L=\frac{c^2}{\alpha'}\left\{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V_1^2}{c^2}}}-1\right\}\quad\cdot\cdot⑩$$

$$\frac{L\alpha'}{c^2}+1=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V_1^2}{c^2}}}\qquad\left(\frac{L\alpha'}{c^2}+1\right)^2=\frac{1}{1-\frac{V_1^2}{c^2}}$$

$$1-\frac{V_1^2}{c^2}=\frac{1}{\left(\frac{L\alpha'}{c^2}+1\right)^2}\qquad\frac{V_1^2}{c^2}=1-\frac{1}{\left(\frac{L\alpha'}{c^2}+1\right)^2}$$

$$\frac{V_1^2}{c^2}=1-\frac{1}{\left(\frac{L\alpha'+c^2}{c^2}\right)^2}=1-\frac{1}{\frac{L^2\alpha'^2+L\alpha'c^2+c^4}{c^4}}$$

$$\frac{V_1^2}{c^2}=\frac{\frac{L^2\alpha'^2+2L\alpha'c^2+c^4}{c^4}-1}{\frac{L^2\alpha'^2+2L\alpha'c^2+c^4}{c^4}}=\frac{\frac{L^2\alpha'^2+2L\alpha'c^2}{c^4}}{\frac{L^2\alpha'^2+2L\alpha'c^2+c^4}{c^4}}$$

等加速度での星間移動(5)

$$\frac{V_1{}^2}{c^2}=\frac{L^2\alpha'^2+2L\alpha'c^2}{L^2\alpha'^2+2L\alpha'c^2+c^4}$$

$$\frac{V_1}{c}=\frac{\sqrt{L^2\alpha'^2+2L\alpha'c^2}}{L\alpha'+c^2}$$

$$T'=\frac{c}{2\alpha'}\log\frac{\left(1+\frac{V_1}{c}\right)}{\left(1-\frac{V_1}{c}\right)}\cdots⑪$$

なので

$$T'=\frac{c}{2\alpha'}\log\frac{\left(1+\frac{\sqrt{L^2\alpha'^2+2L\alpha'c^2}}{L\alpha'+c^2}\right)}{\left(1-\frac{\sqrt{L^2\alpha'^2+2L\alpha'c^2}}{L\alpha'+c^2}\right)}$$

$$T'=\frac{c}{2\alpha'}\log\left(\frac{L\alpha'+c^2+\sqrt{L^2\alpha'^2+2L\alpha'c^2}}{L\alpha'+c^2-\sqrt{L^2\alpha'^2+2L\alpha'c^2}}\right)\cdots⑫$$

$\alpha'=g$ で加速して時間T'が経った後のロケットの速度をV_1とおけば

$$T'=\frac{c}{2g}\log\frac{\left(1+\frac{V_1}{c}\right)}{\left(1-\frac{V_1}{c}\right)}\cdots⑬$$

地上で観測した時間Tは $dV=adt$ なので

$$T=\int_0^{V_1}\frac{dV}{a}=\int_0^{V_1}\frac{dV}{\alpha'\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\int_0^{V_1}\frac{dV}{g\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

等加速度での星間移動(6)

$$T = \frac{1}{g}\int_0^{V_1} \frac{dV}{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \quad \cdots⑭$$

$V = c\sin\theta$ とおくと　$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{V}{c}\right)$

$$dV = c\cos\theta d\theta$$

$$T = \frac{1}{g}\int_0^{V_1} \frac{dV}{(1-\sin\theta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{g}\int_0^{V_1} \frac{dV}{(\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$T = \frac{1}{g}\int_0^{\sin^{-1}\left(\frac{V_1}{c}\right)} \frac{c\cos\theta d\theta}{(\cos^3\theta)} = \frac{c}{g}\int_0^{\sin^{-1}\left(\frac{V_1}{c}\right)} \frac{d\theta}{\cos^2\theta} \quad \cdots⑮$$

$$\frac{d}{d\theta}(\tan\theta) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) = \frac{1}{\cos^2\theta} \quad \cdots⑯$$

$$\tan\theta = \int \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$T = \frac{c}{g}\int_0^{\sin^{-1}\left(\frac{V_1}{c}\right)} \frac{d\theta}{\cos^2\theta} \qquad \frac{V_1}{c} = \sin\theta$$

$$\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{V_1}{c}\right)^2}$$

$$T = \frac{c}{g}\tan\theta_1 \qquad T = \frac{V_1}{g\sqrt{1-\left(\frac{V_1}{c}\right)^2}} \quad \cdots⑰$$

等加速度での星間移動（7）

$$T' = \frac{c}{2g}\log\frac{\left(1+\frac{V_1}{c}\right)}{\left(1-\frac{V_1}{c}\right)} \quad \cdot\cdot⑬$$

$x_1 = \frac{V_1}{c}$ とおくと

$$T' = \frac{c}{2g}\log\frac{(1+x_1)}{(1-x_1)} \quad \cdot\cdot⑱$$

$$T'\frac{2g}{c} = \log\frac{(1+x_1)}{(1-x_1)}$$

$$\frac{1+x_1}{1-x_1} = e^{\frac{2T'g}{c}} \qquad 1+x_1 = (1-x_1)e^{\frac{2T'g}{c}}$$

$$1+x_1 = e^{\frac{2T'g}{c}} - x_1 e^{\frac{2T'g}{c}} \qquad x_1 + x_1 e^{\frac{2T'g}{c}} = e^{\frac{2T'g}{c}} - 1$$

$$x_1\left(1+e^{\frac{2T'g}{c}}\right) = e^{\frac{2T'g}{c}} - 1$$

$$x_1 = \frac{e^{\frac{2T'g}{c}} - 1}{e^{\frac{2T'g}{c}} + 1} \quad \cdot\cdot⑲$$

$$T = \frac{V_1}{g\sqrt{1-\left(\frac{V_1}{c}\right)^2}} = \frac{cx_1}{g\sqrt{1-x_1{}^2}} \quad \cdot\cdot⑳$$

等加速度での星間移動(8)

$$T' = \frac{c}{2g}\log\left(\frac{Lg + c^2 + \sqrt{L^2g^2 + 2Lgc^2}}{Lg + c^2 - \sqrt{L^2g^2 + 2Lgc^2}}\right)$$

$$T' = \frac{c}{2g}\log\frac{(1+x_1)}{(1-x_1)} \quad \cdot\cdot⑱ \qquad x_1 = \frac{V_1}{c}$$

$$x_1 = \frac{e^{\frac{2T'g}{c}} - 1}{e^{\frac{2T'g}{c}} + 1} \quad \cdot\cdot⑲$$

とおくと

$$T = \frac{V_1}{g\sqrt{1-\left(\frac{V_1}{c}\right)^2}} = \frac{cx_1}{g\sqrt{1-x_1^2}} \quad \cdot\cdot⑳$$

$$L = \int V dt = \int_0^{V_1} \frac{VdV}{\alpha'\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\alpha'}\int_0^{V_1}\frac{VdV}{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

加速したロケットが目的地に到着したときに静止していなければならない。V_1まで加速してから減速静止するまでの距離は

$$\int V dt = \int_{V_1}^{0}\frac{VdV}{-\alpha'\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$-\int_{V_1}^{0}\frac{VdV}{\alpha'\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^{V_1}\frac{VdV}{\alpha'\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = L$$

同じ大きさで逆向きの加速度-α'で減速した場合、加速した場合と同じ距離Lだけ進んで静止することになる。

等加速度での星間移動(9)

加速度gで中間点まで距離LをV_1まで加速し、その後-gで減速して目的の星に到着する。目的の星までの距離2Lは、

$$2L=\frac{2c^2}{g}\left\{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V_1^2}{c^2}}}-1\right\}\qquad \frac{V_1}{c}=\frac{\sqrt{L^2g^2+2Lgc^2}}{Lg+c^2}$$

目的の星に到着するまでロケット内での経過時間2T'は

$$2T'=\frac{c}{g}\log\frac{(1+x_1)}{(1-x_1)}\quad\cdot\cdot⑱\qquad x_1=\frac{V_1}{c}$$

この間に地上での経過時間2Tは

$$2T=\frac{2V_1}{g\sqrt{1-\left(\frac{V_1}{c}\right)^2}}=\frac{2cx_1}{g\sqrt{1-x_1^2}}\quad\cdot\cdot⑳$$

10光年離れた星まで到達するのに、地球上では11.79年を要するが、ロケット内では4.858年が経過する。ロケットの最大到達速度は光速の98.67%である。

時間の遅れ(1)

$$\begin{bmatrix} ct = \gamma ct' + \gamma\beta x' \\ x = \gamma\beta ct' + \gamma x' \\ y = y' \\ z = z' \end{bmatrix} \cdots ①$$

S'系の原点に固定された時計について
考察する。

$x' = 0$

$ct_1 = \gamma ct_1' + \gamma\beta \cdot 0$

$x_1 = \gamma\beta ct_1' + \gamma \cdot 0$

$x' = 0$

$ct_2 = \gamma ct_2' + \gamma\beta \cdot 0$

$x_2 = \gamma\beta ct_2' + \gamma \cdot 0$

$$\beta = \frac{V}{c} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$(t_2 - t_1) = \gamma(t_2' - t_1')$$

$$dt = \gamma dt' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} dt'$$

$$dt' = \sqrt{1-\beta^2}\, dt \cdots ②$$

地上の時計より
遅い！

$$(x_2 - x_1) = V\gamma(t_2' - t_1')$$

$$(x_2 - x_1) = V(t_2 - t_1)$$

$$dx = Vdt$$

$$dt = \frac{dx}{V}$$

地上座標系でS'系の原点が移動
した距離で地上での経過時間が
わかり、S'系の原点に固定した時
計の経過時間もわかる。

時間の遅れ(2)

$$\underset{\text{固有時間}}{dt'} = \sqrt{1-\beta^2}\,\underset{\text{地上時間}}{dt}$$

$$\left[\beta = \frac{V}{c} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right]$$

$$\beta = \frac{99}{100} \quad dt' = \sqrt{1-\left(\frac{99}{100}\right)^2}\,dt = \sqrt{\frac{10000}{10000}-\left(\frac{99}{100}\right)^2}\,dt$$

$$= \sqrt{\frac{10000-9801}{10000}}\,dt = \sqrt{\frac{199}{10000}}\,dt = \frac{14.1}{100}\,dt = 0.141dt$$

光速の99%で移動する物体中では、<u>時間は地上の14.1%の速さ</u>で進む。

時間の遅れ(3)

$$\beta = \frac{V}{c}$$

$$dt' = \sqrt{1-\beta^2}\,dt$$

dt = 地上時間

dt' = 固有時間

番号	β	地上時間[S]	物体固有時間[S]	$\frac{\text{地上時間}}{\text{固有時間}}$
1	0.1	1	0.994987437	1.005037815
2	0.7	1	0.714142843	1.400280084
3	0.8	1	0.6	1.666666667
4	0.9	1	0.435889894	2.294157339
5	0.99	1	0.14106736	7.08881205
6	0.999	1	0.044710178	22.36627204
7	0.9999	1	0.014141782	70.71244595
8	0.99999	1	0.004472125	223.6073568
9	0.999999	1	0.001414213	707.1069579
10	0.9999999	1	0.000447214	2236.068034

光速で移動する光子は、時間が止まっている。

光は宇宙の始まり以降歳をとっていない。0歳のまま。

時刻の同時性

$$ct = \gamma ct' + \gamma\beta x'$$
$$x = \gamma\beta ct' + \gamma x'$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$

S系に対して運動するS’系の異なる2点で同時に二つの現象が起こったとする。

$$ct_1 = \gamma ct' + \gamma\beta x_1'$$
$$ct_2 = \gamma ct' + \gamma\beta x_2'$$
$$x_1 = \gamma\beta ct' + \gamma x_1'$$
$$x_2 = \gamma\beta ct' + \gamma x_2'$$

$$(t_2 - t_1) = \frac{\gamma\beta}{c}(x_2' - x_1')$$

$$\therefore x_2' - x_1' \neq 0 \quad \Rightarrow \quad t_2 - t_1 \neq 0$$

S’系の異なる2点で同時に起こったことがS系では同時に観察されないことを示している。

$$(x_2 - x_1) = \gamma(x_2' - x_1')$$

$$(x_2' - x_1') = \frac{1}{\gamma}(x_2 - x_1) = \sqrt{1-\beta^2}(x_2 - x_1)$$

S’系ではS系の長さが収縮して観測される事を意味する

数学的準備

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 \end{pmatrix} \quad x^\mu = \begin{pmatrix} ct & x & y & z \end{pmatrix}$$

$$x^\mu = \begin{pmatrix} ct & \mathbf{x} \end{pmatrix}$$

$$x_\mu = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 & -x^1 & -x^2 & -x^3 \end{pmatrix}$$

$$x_\mu = \begin{pmatrix} ct & -x & -y & -z \end{pmatrix}$$

$$x_\mu = \begin{pmatrix} ct & -\mathbf{x} \end{pmatrix}$$

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^0} & \nabla \end{pmatrix} \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_0} & -\nabla \end{pmatrix}$$

$$\beta = \frac{V}{c} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad d\tau = \sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}dt$$

$$\Lambda^\mu_\nu = \Lambda^\nu_\mu = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = diag(1 \quad -1 \quad -1 \quad -1)$$

$$a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu \qquad a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu$$

現代物理学を習得する上で、現代物理特有の式の表現の仕方扱い方があります。わざわざこんな面倒な表現をするのかと思いますが、これにも理由があることです。最初は唐突な感じですが、そのうちに慣れてきます。

内積の定義とローレンツ不変量

- ローレンツ変換に従うベクトルを**四元ベクトル**という。
- 四元ベクトル **a と b の内積**を次のように約束する。

$$a\cdot b = a^\mu b_\mu = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3$$

$$= a^0 b^0 - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_\mu b^\mu$$

四元ベクトルのローレンツ変換後の内積をとる。

$$a'\cdot b' = a'^\mu b'_\mu = a'^0 b'^0 - a'^1 b'^1 - a'^2 b'^2 - a'^3 b'^3$$

$$a'\cdot b' = a'^\mu b'_\mu$$

$$= (\gamma a^0 - \beta\gamma a^1)(\gamma b^0 - \beta\gamma b^1) - (-\beta\gamma a^0 + \gamma a^1)(-\beta\gamma b^0 + \gamma b^1) - a^2 b^2 - a^3 b^3$$

$$= \gamma^2 a^0 b^0 - \gamma^2 \beta^2 a^0 b^0 + \beta^2 \gamma^2 a^1 b^1 - \gamma^2 a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3$$

$$= \gamma^2 (1-\beta^2) a^0 b^0 - \gamma^2 (1-\beta^2) a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3$$

$$= \frac{1}{(1-\beta^2)}(1-\beta^2) a^0 b^0 - \frac{1}{(1-\beta^2)}(1-\beta^2) a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3$$

$$= a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 = a^\mu b_\mu = a\cdot b$$

四元ベクトル同士の内積は、ローレンツ変換について不変量になる。（ローレンツスカラー量）

四元ベクトル（１）

$$\begin{bmatrix} ct_1' \\ x_1' \\ y_1' \\ z_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct_1 \\ x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \cdots ①$$

$$\begin{bmatrix} ct_2' \\ x_2' \\ y_2' \\ z_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct_2 \\ x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \cdots ②$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\beta = \frac{V}{c}$$

$$\gamma^2\left(1-\beta^2\right) = 1$$

②−①

$$\begin{bmatrix} ct_2' \\ x_2' \\ y_2' \\ z_2' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ct_1' \\ x_1' \\ y_1' \\ z_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct_2 \\ x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct_1 \\ x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \cdots ③$$

$$\begin{bmatrix} c(t_2'-t_1') \\ (x_2'-x_1') \\ (y_2'-y_1') \\ (z_2'-z_1') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c(t_2-t_1) \\ (x_2-x_1) \\ (y_2-y_1) \\ (z_2-z_1) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} cdt' \\ dx' \\ dy' \\ dz' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cdt \\ dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \cdots ④$$

四元ベクトル(2)

$$\begin{bmatrix} cdt' \\ dx' \\ dy' \\ dz' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cdt \\ dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \cdots ⑤$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\beta = \frac{V}{c}$$

$$\gamma^2\left(1-\beta^2\right) = 1$$

⑤は以下のベクトルがローレンツ変換に従う
四元ベクトルであることを示している。

$$dx^{\mu} = \left[cdt \quad dx \quad dy \quad dz\right]$$ 反変ベクトル

$$dx_{\mu} = \left[cdt \quad -dx \quad -dy \quad -dz\right]$$ 共変ベクトル

四元ベクトルの内積とローレンツ不変量（１）

同じ四元ベクトルのローレンツ変換後の内積をとる。

$$dx'\cdot dx' = dx'^{\mu}\, dx'_{\mu} = dx'^{0}\, dx'^{0} - dx'^{1}\, dx'^{1} - dx'^{2}\, dx'^{2} - dx'^{3}\, dx'^{3}$$

$$= (\gamma dx^0 - \beta\gamma dx^1)(\gamma dx^0 - \beta\gamma dx^1) - (-\beta\gamma dx^0 + \gamma dx^1)(-\beta\gamma dx^0 + \gamma dx^1) - dx^2 dx^2 - dx^3 dx^3$$

$$= \gamma^2 dx^0 dx^0 - \gamma^2\beta^2 dx^0 dx^0 + \beta^2\gamma^2 dx^1 dx^1 - \gamma^2 dx^1 dx^1 - dx^2 dx^2 - dx^3 dx^3$$

$$= \gamma^2(1-\beta^2) dx^0 dx^0 - \gamma^2(1-\beta^2) dx^1 dx^1 - dx^2 dx^2 - dx^3 dx^3$$

$$= \frac{1}{(1-\beta^2)}(1-\beta^2) dx^0 dx^0 - \frac{1}{(1-\beta^2)}(1-\beta^2) dx^1 dx^1 - dx^2 dx^2 - dx^3 dx^3$$

$$= dx^0 dx^0 - dx^1 dx^1 - dx^2 dx^2 - dx^3 dx^3 = dx^{\mu} dx_{\mu} = dx\cdot dx$$

$$\therefore \quad dx'\cdot dx' = dx\cdot dx \quad \Longleftrightarrow \quad dx'^{\mu}\, dx'_{\mu} = dx^{\mu} dx_{\mu}$$

同じ四元ベクトルについての内積は、ローレンツ変換について不変量になる事を示している。（ローレンツスカラー量）

$$dx^{\mu} dx_{\mu} = cdtcdt - dxdx - dydy - dzdz = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

＝ローレンツ不変量

$$ds^2 = dx^{\mu} dx_{\mu} = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

$$ds'^2 = dx'^{\mu}\, dx'_{\mu} = c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2$$

$$ds^2 = ds'^2$$

$$c^2\left(dt'^2 - \frac{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}{c^2}\right) = c^2\left(dt^2 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2}\right)$$

$$c^2 dt'^2\left(1 - \frac{\left(\frac{dx'}{dt'}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt'}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{dt'}\right)^2}{c^2}\right) = c^2 dt^2\left(1 - \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}{c^2}\right)$$

$$c^2 dt'^2\left(1 - \frac{\upsilon_x'^2 + \upsilon_y'^2 + \upsilon_z'^2}{c^2}\right) = c^2 dt^2\left(1 - \frac{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}{c^2}\right)$$

四元ベクトルの内積とローレンツ不変量(2)

$$c^2 dt'^2 \left(1-\frac{\upsilon'^2}{c^2}\right) = c^2 dt^2 \left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)$$ 両辺をc²で割ると

$$\frac{ds^2}{c^2} = \frac{ds'^2}{c^2} = d\tau^2 = \left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right) dt^2 = \left(1-\frac{\upsilon'^2}{c^2}\right) d't^2$$

$$d\tau = dt' \sqrt{1-\frac{\upsilon'^2}{c^2}} = dt \sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}$$

$d\tau$ は時間の次元を持ち、どの慣性系から観測しても、それぞれの物体について固有の時間が経過することを示している。

$\upsilon' = 0$ となる場合　粒子に固定された時計で時間を記述することに相当する。

$$d\tau = dt' = dt \sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}$$

慣性系S'に対して静止している時計の進みは固有時と同じとなる。

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} dt$$

固有時はローレンツ不変量である。

ローレンツ不変量と固有時

$$dx^{\mu} = \begin{bmatrix} cdt & dx & dy & dz \end{bmatrix}$$

はローレンツ変換に従う四元ベクトルである。
従ってその内積をとると、不変量スカラーとなる。

$$dx^{\mu} dx_{\mu} = dx^{\mu} g_{\mu\nu} dx^{\nu}$$

$$= \begin{bmatrix} cdt & dx & dy & dz \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cdt \\ dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$

$$= c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

$$ds^2 = dx^{\mu} dx_{\mu}$$

$$ds^2 = dx^{\mu} dx_{\mu} = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{\left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right]}{c^2} \right)$$

$$= c^2 dt^2 \left(1 - \frac{\upsilon_x{}^2 + \upsilon_y{}^2 + \upsilon_z{}^2}{c^2} \right) = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2} \right)$$

$$d\tau^2 = \frac{ds^2}{c^2} = dt^2 \left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2} \right) = \left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2} \right) dt^2$$

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}\, dt \qquad \tau = \int_0^{\tau} d\tau = \int_0^{t} \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}\, dt$$

dτはローレンツスカラー量となり、その積分量τを
固有時という。全ての慣性座標系で同じ量である。

特殊相対論的運動方程式(1)
(ニュートン力学の修正)

ところで四元ベクトルにローレンツスカラーをかけたベクトルも四元ベクトルであるので、dτで割っても四元ベクトルである。

$$\frac{dx^\mu}{d\tau}=\begin{bmatrix}\frac{cdt}{d\tau} & \frac{dx}{d\tau} & \frac{dy}{d\tau} & \frac{dz}{d\tau}\end{bmatrix}\cdots①$$ 四元速度

$$=\begin{bmatrix}\frac{cdt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}dt} & \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}dt} & \frac{dy}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}dt} & \frac{dz}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}dt}\end{bmatrix}$$

$$\frac{dx^\mu}{d\tau}=\begin{bmatrix}\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{dx}{dt} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{dy}{dt} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{dz}{dt}\end{bmatrix}$$

更に静止質量m_0をかけても四元ベクトルである。

$$p^\mu=m_0\frac{dx^\mu}{d\tau}\cdots②$$ 四元運動量

$$=\begin{bmatrix}\frac{m_0c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{dx}{dt} & \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{dy}{dt} & \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{dz}{dt}\end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\left(p^j\right)=F^j\cdots③$$ 空間部分の運動方程式

更に<u>四元運動量を固有時で微分</u>する。空間部分については　j=1,2,3

$$\frac{d}{d\tau}\left(p^j\right)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\left(p^j\right)=\frac{F^j}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=f^j\cdots④$$

特殊相対論的運動方程式(2)
(ニュートン力学の修正)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)=m_0\frac{d}{dt}\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{\frac{-1}{2}}$$

$$=-\frac{m_0}{2}\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{\frac{-3}{2}}\left(-\frac{2}{c^2}\upsilon_x\frac{d\upsilon_x}{dt}-\frac{2}{c^2}\upsilon_y\frac{d\upsilon_y}{dt}-\frac{2}{c^2}\upsilon_z\frac{d\upsilon_z}{dt}\right)$$

$$=\frac{m_0}{c^2}\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{\frac{-3}{2}}\left(\upsilon_x\frac{d\upsilon_x}{dt}+\upsilon_y\frac{d\upsilon_y}{dt}+\upsilon_z\frac{d\upsilon_z}{dt}\right)=\frac{m_0}{c^2}\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{\frac{-3}{2}}\vec{\upsilon}\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$$

$$\therefore\ \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)=m_0\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{\frac{-3}{2}}\vec{\upsilon}\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\frac{m_0}{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\vec{\upsilon}\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\cdots⑤$$

ニュートンの運動方程式は、<u>運動量の時間変化率が力に相当</u>するので

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\vec{\upsilon}\right)=\vec{F}\cdots⑥$$

<u>力と速度の積が仕事率</u>　であることから

$$\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\vec{\upsilon}\right)=\vec{\upsilon}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)\cdot\vec{\upsilon}+\vec{\upsilon}\cdot\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$$

$$=\vec{\upsilon}\cdot\frac{m_0}{c^2\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\vec{\upsilon}\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\cdot\vec{\upsilon}+\vec{\upsilon}\cdot\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$$

特殊相対論的運動方程式(3)
(ニュートン力学の修正)

$$\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}=\frac{m_0}{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{\upsilon^2}{c^2}\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\cdot\vec{\upsilon}+\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\vec{\upsilon}\cdot\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$$

$$\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\frac{1}{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)}\frac{\upsilon^2}{c^2}\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\cdot\vec{\upsilon}+\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\vec{\upsilon}\cdot\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$$

$$\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\left(\frac{\frac{\upsilon^2}{c^2}}{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)}+1\right)\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\cdot\vec{\upsilon}$$

$$=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\left(\frac{\frac{\upsilon^2}{c^2}}{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)}+\frac{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)}\right)\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\cdot\vec{\upsilon}$$

$$\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)}\right)\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\cdot\vec{\upsilon}=\frac{m_0}{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\cdot\vec{\upsilon}\quad\cdots⑦$$

⑤⑦より単位時間当たりのエネルギー変化が仕事率なので

$$\therefore\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)=\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}\quad\cdots⑧$$

⑧式の括弧中はエネルギーと考えられる

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\qquad E=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}=mc^2\quad\cdots⑨$$

質量とエネルギーの等価性

$$E = mc^2 [\mathrm{J}]$$

$$c = 3.0\times10^8 [m/s]$$

m_0 ＝ 静止質量

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

1.0gの質量がエネルギーに変換すると

$$1.0\times10^{-3} kg\times(3\times10^8)^2$$
$$=9.0\times10^{13}[\mathrm{J}]$$

$>$

$$\log_{10} E = 4.8 + 1.5M$$

マグニチュード6.0の
地震のエネルギー

$$6.3\times10^{13}[\mathrm{J}]$$

広島型原爆 $\rightarrow$ $5.5\times10^{13}[\mathrm{J}]$

特殊相対論的運動方程式（4）
（ニュートン力学の修正）

$$\frac{dE}{dt}=\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}\quad\cdots ⑩$$

⑧式から

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)=\frac{d}{d\tau}\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)=\frac{\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\cdots ⑪$$

$$\therefore\frac{d}{d\tau}\left(\frac{m_0c}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)=\frac{\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}}{c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\cdots ⑫$$

⑫式から

$$p^0=\frac{m_0c}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}=mc=\frac{E}{c}\quad f^0=\frac{\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}}{c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$$

とおくと

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{E}{c}\right)=\frac{d}{d\tau}\left(p^0\right)=f^0\cdots ⑬$$

⑥式を変形して次のようになる。

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\vec{\upsilon}\right)=\frac{d}{d\tau}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\vec{\upsilon}\right)=\frac{\vec{F}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}=\vec{f}\cdots ⑥$$

四元運動量は以下の通り

$$p^\mu=m_0\frac{dx^\mu}{d\tau}=\begin{bmatrix}\frac{E}{c} & m\frac{dx}{dt} & m\frac{dy}{dt} & m\frac{dz}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{E}{c} & \vec{p}\end{bmatrix}$$

$$p^\mu=m_0\frac{dx^\mu}{d\tau}=\begin{bmatrix}\frac{E}{c} & m\upsilon_x & m\upsilon_y & m\upsilon_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{E}{c} & \vec{p}\end{bmatrix}\quad\cdots ⑭$$

特殊相対論的運動方程式(5)
(ニュートン力学の修正)

四元力

$$f^{\mu}=\left[\frac{\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}}{c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\quad\frac{F_x}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\quad\frac{F_y}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\quad\frac{F_z}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right]=\left[\frac{\vec{f}\cdot\vec{\upsilon}}{c}\quad\vec{f}\right]\quad\cdots⑮$$

四元運動量と四元力から運動方程式を書き下すと

$$\frac{d}{d\tau}\left(p^{\mu}\right)=\frac{d}{d\tau}\left[\frac{E}{c}\quad m\frac{dx}{dt}\quad m\frac{dy}{dt}\quad m\frac{dz}{dt}\right]=\left[\frac{\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}}{c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\quad\frac{F_x}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\quad\frac{F_y}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\quad\frac{F_z}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right]=f^{\mu}\quad\cdot\cdot⑯$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(p^{\mu}\right)=\frac{d}{d\tau}\left[\frac{E}{c}\quad\vec{p}\right]=\left[\frac{\vec{f}\cdot\vec{\upsilon}}{c}\quad\vec{f}\right]=f^{\mu}\quad\cdot\cdot⑰$$

四元ベクトルを固有時で微分しても四元ベクトルである。

特殊相対論的運動方程式(まとめ)

(ニュートン力学の修正)

相対論的運動方程式

$$\frac{d}{d\tau}\left(p^{\mu}\right)=f^{\mu} \Leftrightarrow \frac{d}{d\tau}\left(\frac{E}{c}\right)=\frac{\vec{f}\cdot\vec{\upsilon}}{c} \qquad \frac{d}{d\tau}\left(\vec{p}\right)=\vec{f}$$

四元ベクトルの一般式　　時間的部分　　空間的部分

$$\frac{d}{d\tau}=\frac{dt}{d\tau}\frac{d}{dt}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}$$

$$f^0=\frac{\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}}{c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \qquad \vec{f}=\frac{\vec{F}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$$

特殊相対論的運動方程式（6−1）
（ローレンツ力による運動）

四元力の一般系は

$$f^{\mu}=\left[\frac{\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}}{c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\quad \frac{F_x}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\quad \frac{F_y}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\quad \frac{F_z}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right]\cdots⑮$$

空間的な力が、ローレンツ力の場合

$$\vec{F}=q\left(\vec{E}+\vec{\upsilon}\times\vec{B}\right)$$

$$\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}=q\left(\vec{E}+\vec{\upsilon}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{\upsilon}=q\left(\vec{E}\cdot\vec{\upsilon}\right)+q\left(\vec{\upsilon}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{\upsilon}$$

$$\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}=q\left(\vec{E}\cdot\vec{\upsilon}\right)$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(p^{\mu}\right)=\frac{d}{d\tau}\left[\frac{E}{c}\quad \vec{p}\right]=\left[\frac{\vec{f}\cdot\vec{\upsilon}}{c}\quad \vec{f}\right]=f^{\mu}\quad\cdot\cdot⑰$$

$$F_x=\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\upsilon_x}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)=q\left(\vec{E}+\vec{\upsilon}\times\vec{B}\right)_x=q\left(E_x+\upsilon_yB_z-\upsilon_zB_x\right)$$

$$F_y=\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\upsilon_y}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)=q\left(\vec{E}+\vec{\upsilon}\times\vec{B}\right)_y=q\left(E_y+\upsilon_zB_x-\upsilon_xB_z\right)$$

$$F_z=\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\upsilon_z}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)=q\left(\vec{E}+\vec{\upsilon}\times\vec{B}\right)_z=q\left(E_z+\upsilon_xB_y-\upsilon_yB_x\right)$$

$$\frac{\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}}{c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}=\frac{q\left(E_x\upsilon_x+E_y\upsilon_y+E_z\upsilon_z\right)}{c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$$

$$\frac{F_x}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}=\frac{q\left(E_x+\upsilon_yB_z-\upsilon_zB_x\right)}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$$

$$\frac{F_y}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}=\frac{q\left(E_y+\upsilon_zB_x-\upsilon_xB_z\right)}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$$

$$\frac{F_y}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}=\frac{q\left(E_z+\upsilon_xB_y-\upsilon_yB_x\right)}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$$

$\cdots①$

特殊相対論的運動方程式(6-2)
(ローレンツ力による運動)

$$f^0=\frac{\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}}{c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}=q\left(\frac{E_x}{c}\frac{\upsilon_x}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}+\frac{E_y}{c}\frac{\upsilon_y}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}+\frac{E_z}{c}\frac{\upsilon_z}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)$$

$$f^1=\frac{F_x}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}=q\left(\frac{E_x}{c}\frac{c}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}+B_z\frac{\upsilon_y}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}-B_y\frac{\upsilon_z}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)$$

$$f^2=\frac{F_y}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}=q\left(\frac{E_y}{c}\frac{c}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}-B_z\frac{\upsilon_x}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}+B_x\frac{\upsilon_z}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)$$

$$f^3=\frac{F_y}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}=q\left(\frac{E_z}{c}\frac{c}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}+B_y\frac{\upsilon_x}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}-B_x\frac{\upsilon_y}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)$$

電磁気的な反変四元力を行列を用いて表す。

$$\begin{bmatrix}\frac{c}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\\ \frac{\upsilon_x}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\\ \frac{\upsilon_y}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\\ \frac{\upsilon_z}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\end{bmatrix}_z=\begin{bmatrix}u^0\\u^1\\u^2\\u^3\end{bmatrix}$$

反変四元速度を用いて表す

…②

$$\begin{bmatrix}f^0\\f^1\\f^2\\f^3\end{bmatrix}=q\begin{bmatrix}0&\frac{E_x}{c}&\frac{E_y}{c}&\frac{E_z}{c}\\ \frac{E_x}{c}&0&B_z&-B_y\\ \frac{E_y}{c}&-B_z&0&B_x\\ \frac{E_z}{c}&B_y&-B_x&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u^0\\u^1\\u^2\\u^3\end{bmatrix}\cdots③$$

特殊相対論的運動方程式(6-3)
(ローレンツ力による運動)

$$f^0=\frac{\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}}{c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}=q\left(\left(-\frac{E_x}{c}\right)\left(-\frac{\upsilon_x}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)+\left(-\frac{E_y}{c}\right)\left(-\frac{\upsilon_y}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)+\left(-\frac{E_z}{c}\right)\left(-\frac{\upsilon_z}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)\right)$$

$$f^1=\frac{F_x}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}=q\left(\frac{E_x}{c}\frac{c}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}-B_z\left(-\frac{\upsilon_y}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)+B_y\left(-\frac{\upsilon_z}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)\right)$$

$$f^2=\frac{F_y}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}=q\left(\frac{E_y}{c}\frac{c}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}+B_z\left(-\frac{\upsilon_x}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)-B_x\left(-\frac{\upsilon_z}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)\right)$$

$$f^3=\frac{F_y}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}=q\left(\frac{E_z}{c}\frac{c}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}-B_y\left(-\frac{\upsilon_x}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)+B_x\left(-\frac{\upsilon_y}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)\right)$$

電磁気的な共変四元力を行列を用いて表す。

$$\begin{bmatrix}\frac{c}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\\ -\frac{\upsilon_x}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\\ -\frac{\upsilon_y}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\\ -\frac{\upsilon_z}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u^0\\ -u^1\\ -u^2\\ -u^3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_0\\ u_1\\ u_2\\ u_3\end{bmatrix}$$

共変四元速度を用いて表す

…④

$$\begin{bmatrix}f^0\\ f^1\\ f^2\\ f^3\end{bmatrix}=q\begin{bmatrix}0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c}\\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y\\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x\\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_0\\ u_1\\ u_2\\ u_3\end{bmatrix}$$

$$f^{\mu}=qF^{\mu\nu}u_{\nu} \qquad \cdots⑤$$

特殊相対論的運動方程式(7-1)
(ローレンツ力による運動)

③の行列の変形を用いて導くと

$$
\begin{bmatrix} f^0 \\ f^1 \\ f^2 \\ f^3 \end{bmatrix} = q \begin{bmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & B_z & -B_y \\ \frac{E_y}{c} & -B_z & 0 & B_x \\ \frac{E_z}{c} & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^0 \\ u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & B_z & -B_y \\ \frac{E_y}{c} & -B_z & 0 & B_x \\ \frac{E_z}{c} & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} f^0 \\ f^1 \\ f^2 \\ f^3 \end{bmatrix} = q \begin{bmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^0 \\ u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} f^0 \\ f^1 \\ f^2 \\ f^3 \end{bmatrix} = q \begin{bmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^0 \\ -u^1 \\ -u^2 \\ -u^3 \end{bmatrix} = q \begin{bmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad \cdots ⑤
$$

特殊相対論的運動方程式(7-2)
(ローレンツ力による運動)

電磁気力の4元力は

$$\begin{bmatrix} f^0 \\ f^1 \\ f^2 \\ f^3 \end{bmatrix} = q \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{E_x}{c} & -\dfrac{E_y}{c} & -\dfrac{E_z}{c} \\ \dfrac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \dfrac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \dfrac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \cdots ⑤$$

$$GG = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{f^{\mu} = qF^{\mu\nu} u_{\nu}}$$

2階反変電磁テンソル

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{E_x}{c} & -\dfrac{E_y}{c} & -\dfrac{E_z}{c} \\ \dfrac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \dfrac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \dfrac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}$$

特殊相対論的運動方程式(7-3)
(ローレンツ力による運動)

電磁気力の4元力

$$f^{\mu} = qF^{\mu\nu}u_{\nu} \quad \cdots⑤$$

電磁気力の4元力による運動方程式

$$\frac{d}{d\tau}\left(p^{\mu}\right) = qF^{\mu\nu}u_{\nu} \quad \cdots⑥$$

特殊相対論的運動方程式(7-4)
(ローレンツ力による運動)

電磁気力の4元力

$$f^0=\frac{\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}}{c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}=q\left(\frac{E_x}{c}\frac{\upsilon_x}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}+\frac{E_y}{c}\frac{\upsilon_y}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}+\frac{E_z}{c}\frac{\upsilon_z}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)\quad \frac{d}{d\tau}\left(\frac{E}{c}\right)=q\left(\frac{E_x}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\frac{dx}{dt}+\frac{E_y}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\frac{dy}{dt}+\frac{E_z}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\frac{dz}{dt}\right)$$

電磁気力の4元力による運動方程式の時間部分

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{E}{c}\right)=q\left(\frac{E_x}{c}\frac{dx}{d\tau}+\frac{E_y}{c}\frac{dy}{d\tau}+\frac{E_z}{c}\frac{dz}{d\tau}\right)\quad\cdots⑦$$

特殊相対論的運動方程式（8-1）
（ローレンツ力による運動）

行列の変形を用いて導くと

$$\begin{bmatrix} f^0 \\ f^1 \\ f^2 \\ f^3 \end{bmatrix} = q\begin{bmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \cdots⑤ = q\begin{bmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f^0 \\ f^1 \\ f^2 \\ f^3 \end{bmatrix} = q\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \cdots⑧$$

特殊相対論的運動方程式(8-2)
(ローレンツ力による運動)

行列の変形を用いて導く

$$\begin{bmatrix} f^0 \\ -f^1 \\ -f^2 \\ -f^3 \end{bmatrix} = q \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & B_z & -B_y \\ \frac{E_y}{c} & -B_z & 0 & B_x \\ \frac{E_z}{c} & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} f^0 \\ -f^1 \\ -f^2 \\ -f^3 \end{bmatrix} = q \begin{bmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ -u_1 \\ -u_2 \\ -u_3 \end{bmatrix} \cdots ⑧$$

$$\begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = q \begin{bmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^0 \\ u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{bmatrix} \cdots ⑨ \Rightarrow F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}$$

なので $f_\mu = qF_{\mu\nu}u^\nu \cdots ⑩$

2階共変電磁テンソル

特殊相対論的運動方程式(8-3)

(ローレンツ力による運動)

電磁気力の4元力

$$f_\mu = qF_{\mu\nu}u^\nu \quad \cdots ⑩$$

電磁気力の4元力による運動方程式

$$\frac{d}{d\tau}\left(p_\mu\right) = qF_{\mu\nu}u^\nu \quad \cdots ⑪$$

テンソル方程式の共変性（１）

$$\boxed{\frac{d}{d\tau}\left(p^{i}\right)=qF^{ij}u_{j}}\qquad F^{\mu\nu}=\frac{\partial A^{\nu}}{\partial x_{\mu}}-\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\nu}}=\partial^{\mu}A^{\nu}-\partial^{\nu}A^{\mu}$$

上記方程式の右辺について座標変換すると

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{i}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{j}}\frac{\partial x^{j}}{\partial x'^{\nu}}qF^{ij}u_{j}\quad\cdots①$$

$$=q\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{i}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{j}}\frac{\partial x^{j}}{\partial x'^{\nu}}\left(\frac{\partial A^{j}}{\partial x_{i}}-\frac{\partial A^{i}}{\partial x_{j}}\right)u_{j}$$

$$=q\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{i}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{j}}\frac{\partial A^{j}}{\partial x_{i}}-\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{i}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{j}}\frac{\partial A^{i}}{\partial x_{j}}\right)\frac{\partial x^{j}}{\partial x'^{\nu}}u_{j}$$

$$=q\left\{\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{i}}\left(\frac{\partial A'^{\nu}}{\partial x_{i}}\right)-\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{j}}\left(\frac{\partial A'^{\mu}}{\partial x_{j}}\right)\right\}\frac{\partial x^{j}}{\partial x'^{\nu}}u_{j}\quad\cdots③$$

$$q\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{i}}\frac{\partial A'^{\nu}}{\partial x_{i}}-\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{j}}\frac{\partial A'^{\mu}}{\partial x_{j}}\right)\frac{\partial x^{j}}{\partial x'^{\nu}}u_{j}\quad\cdots④$$

$$=q\left(\frac{\partial A'^{\nu}}{\partial x'_{\mu}}-\frac{\partial A'^{\mu}}{\partial x'_{\nu}}\right)u'_{\nu}\quad\cdots⑤$$

$$\therefore\ \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{i}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{j}}\frac{\partial x^{j}}{\partial x'^{\nu}}qF^{ij}u_{j}=q\left(\frac{\partial A'^{\nu}}{\partial x'_{\mu}}-\frac{\partial A'^{\mu}}{\partial x'_{\nu}}\right)u'_{\nu}\quad\cdots⑥$$

$$=qF'^{\mu\nu}u'_{\nu}\quad\cdots⑦$$

左辺について座標変換すると

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{i}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{j}}\frac{\partial x^{j}}{\partial x'^{\nu}}\frac{d}{d\tau}\left(p^{i}\right)=\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{i}}\frac{d}{d\tau}\left(p^{i}\right)\quad\cdots⑧$$

テンソル方程式の共変性（２）

左辺は反変ベクトルなので

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{i}}\frac{d}{d\tau}\left(p^{i}\right)=\frac{d}{d\tau}\left(p'^{\mu}\right) \quad \cdots ⑨$$

$$\boxed{\frac{d}{d\tau}\left(p'^{\mu}\right)=qF'^{\mu\nu}u'_{\nu} \quad \cdots ⑩}$$

$$\boxed{\frac{d}{d\tau}\left(p_{i}\right)=qF_{ij}u^{j}}$$

$$F_{\mu\nu}=\frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}}=\partial_{\mu}A_{\nu}-\partial_{\nu}A_{\mu}$$

右辺について座標変換すると

$$\frac{\partial x^{i}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{j}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{j}}qF_{ij}u^{j}=q\frac{\partial x^{i}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{j}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{j}}\left(\frac{\partial A_{j}}{\partial x^{i}}-\frac{\partial A_{i}}{\partial x^{j}}\right)u^{j}$$

$$=q\left(\frac{\partial x^{j}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x^{i}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial A_{j}}{\partial x^{i}}-\frac{\partial x^{i}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{j}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial A_{i}}{\partial x^{j}}\right)\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{j}}u^{j} \quad \cdots ⑪$$

$$=q\left(\frac{\partial x^{i}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{j}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial A_{j}}{\partial x^{i}}-\frac{\partial x^{j}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x^{i}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial A_{i}}{\partial x^{j}}\right)u'^{\nu}$$

$$=q\left(\frac{\partial x^{i}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial A'_{\nu}}{\partial x^{i}}-\frac{\partial x^{j}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial A'_{\mu}}{\partial x^{j}}\right)u'^{\nu} \quad \cdots ⑫$$

テンソル方程式の共変性（３）

$$q\left(\frac{\partial A'_{\nu}}{\partial x'^{\mu}}-\frac{\partial A'_{\mu}}{\partial x'^{\nu}}\right)u'^{\nu} = qF'_{\mu\nu}u'^{\nu} \quad \cdots ⑬$$

左辺について座標変換すると

$$\frac{\partial x^{i}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{j}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{j}}\frac{d}{d\tau}(p_{i})=\frac{\partial x^{i}}{\partial x'^{\mu}}\frac{dp_{i}}{d\tau} \quad \cdots ⑭$$

左辺は共変ベクトルなので

$$\frac{\partial x^{i}}{\partial x'^{\mu}}\frac{dp_{i}}{d\tau}=\frac{d}{d\tau}\left(p'_{\mu}\right) \quad \cdots ⑮$$

$$\boxed{\frac{d}{d\tau}\left(p'_{\mu}\right)=qF'_{\mu\nu}u'^{\nu} \cdots ⑯}$$

近日点の移動(１)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\vec{\upsilon}\right)=\vec{F} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)=\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}$$

$$\vec{F}=-\frac{K}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)=\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}=-\frac{K}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{\upsilon}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)=-\frac{K}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{\upsilon}=-\frac{K}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\int_{t_0}^{t}\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)dt=-\int_{r_0}^{r}\frac{K}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}\cdot d\vec{r}=-\int_{r_0}^{r}\frac{K}{r^2}\frac{r}{r}\cdot dr=-\int_{r_0}^{r}\frac{K}{r^2}\cdot dr=\left[\frac{K}{r}\right]_{r_0}^{r}$$

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}-E_0=K\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right] \qquad \frac{1}{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)}=\left(\frac{\frac{K}{r}+E}{m_0c^2}\right)^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\vec{\upsilon}\right)\times\vec{r}=\vec{F}\times\vec{r}=\left(-\frac{K}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}\right)\times\vec{r}=\vec{0}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\times\vec{r}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)\times\vec{r}+\frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\times\vec{\upsilon}=\vec{0} \qquad \frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\times\vec{r}=\vec{h}$$

$$\frac{m_0\upsilon\cdot r\sin\varphi}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}=\left|\vec{h}\right|=h \qquad \frac{m_0r^2\dot{\theta}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}=h \qquad u=\frac{1}{r} \qquad r=\frac{1}{u}$$

$$\left(r\dot{\theta}\right)^2=r^2\dot{\theta}^2$$

双曲線関数(1)

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\cosh\theta = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}$$ 双曲線余弦関数

$$\sinh\theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}$$ 双曲線正弦関数

$$\tanh\theta = \frac{\sinh\theta}{\cosh\theta} = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{e^{\theta} + e^{-\theta}}$$ 双曲線正接関数

$$\cos i\theta = \frac{e^{ii\theta} + e^{-ii\theta}}{2} = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}$$

$$\sin i\theta = \frac{e^{ii\theta} - e^{-ii\theta}}{2i} = \frac{e^{-\theta} - e^{\theta}}{2i}$$

$$\cos i\theta = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2} = \cosh\theta$$

$$\sin i\theta = \frac{e^{-\theta} - e^{\theta}}{2i} = i\sinh\theta$$

双曲線関数(2)

$$\cosh^2\theta = \left(\frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2\theta}+e^{-2\theta}+2}{4}$$

$$\sinh^2\theta = \left(\frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2\theta}+e^{-2\theta}-2}{4}$$

$$\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1$$

$$1-\tanh^2\theta = 1-\frac{\sinh^2\theta}{\cosh^2\theta}$$

$$= \frac{\cosh^2\theta-\sinh^2\theta}{\cosh^2\theta} = \frac{1}{\cosh^2\theta}$$

$$\frac{d}{d\theta}(\cosh\theta) = \frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2} = \sinh\theta$$

$$\frac{d}{d\theta}(\sinh\theta) = \frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2} = \cosh\theta$$

$$\frac{d}{d\theta}(\tanh\theta) = \frac{\cosh\theta}{\cosh\theta} + \sinh\theta\left(-\frac{\sinh\theta}{\cosh^2\theta}\right)$$

$$= \frac{\cosh^2\theta-\sinh^2\theta}{\cosh^2\theta} = \frac{1}{\cosh^2\theta}$$

双曲線関数(3)

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\cosh\theta = \gamma$$

$$\sinh\theta = \gamma\beta$$

$$\tanh\theta = \frac{\sinh\theta}{\cosh\theta} = \frac{\gamma\beta}{\gamma} = \beta$$

$$\cosh^2\theta - \sinh^2\theta$$

$$= (\gamma)^2 - (\gamma\beta)^2 = \gamma^2\left(1-\beta^2\right) = 1$$

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh\theta & -\sinh\theta & 0 & 0 \\ -\sinh\theta & \cosh\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cosh\theta & -\sinh\theta & 0 & 0 \\ -\sinh\theta & \cosh\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta & 0 & 0 \\ \sinh\theta & \cosh\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

特殊相対論的運動方程式（例1）

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\vec{\upsilon}\right)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\vec{\upsilon}\right)=\vec{f}=\frac{\vec{F}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$$

一定の力Fがx軸方向に働いて加速している場合

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\upsilon}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)=F \qquad \left(\frac{m_0\upsilon}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)_0^t=\int_0^t F\,dt$$

$$\frac{m_0\upsilon}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}=Ft \qquad \frac{{m_0}^2\upsilon^2}{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}=F^2t^2$$

$$\upsilon^2=\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)\frac{F^2}{{m_0}^2}t^2 \qquad \upsilon^2+\frac{\upsilon^2}{c^2}\frac{F^2}{{m_0}^2}t^2=\frac{F^2}{{m_0}^2}t^2$$

$$\upsilon^2\left(1+\frac{1}{c^2}\frac{F^2}{{m_0}^2}t^2\right)=\frac{F^2}{{m_0}^2}t^2$$

$$\upsilon^2=\frac{\frac{F^2}{{m_0}^2}t^2}{1+\frac{1}{c^2}\frac{F^2}{{m_0}^2}t^2} \qquad \upsilon=\sqrt{\frac{\frac{F^2}{{m_0}^2}t^2}{1+\frac{F^2}{{m_0}^2c^2}t^2}}$$

$$t\to\infty$$

$$\upsilon=\sqrt{\frac{\frac{F^2}{{m_0}^2}t^2}{1+\frac{F^2}{{m_0}^2c^2}t^2}}=\frac{\frac{F}{m_0}t}{\frac{F}{m_0c}t}\to c$$

いくら加速しても光速を越えることはない！

テンソル表現(1)

$$\begin{bmatrix} cdt' \\ dx' \\ dy' \\ dz' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cdt \\ dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \quad \cdots ⑤$$

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$dx_\mu = g_{\mu\nu} dx^\nu \qquad dx_\mu{}' = g_{\mu\nu} dx^{\nu}{}'$$

$dx_\mu = [cdt \quad -dx \quad -dy \quad -dz]$ 共変ベクトル

$$dx^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} dx^\nu = a_{\mu\nu} dx^\nu \quad dx_\mu{}' = g_{\mu\nu} dx^{\nu}{}'$$

$$dx^{\mu'} dx_\mu{}' = a_{\mu\rho} dx^\rho g_{\mu\nu} a_{\nu\delta} dx^\delta$$

$$dx^{\mu'} dx_\mu{}' = a_{\mu\rho} a_{\nu\delta} g_{\mu\nu} dx^\rho dx^\delta$$

⑤は以下のベクトルがローレンツ変換に従う四元ベクトルであることを示している。

$$dx^\mu = [cdt \quad dx \quad dy \quad dz]$$

はローレンツ変換に従う四元ベクトルである。
従ってその内積をとると、不変量スカラーとなる。

反変ベクトル ⇒ 1階の反変テンソル

$$dx^\mu dx_\mu = dx^\mu g_{\mu\nu} dx^\nu$$

$$= [cdt \quad dx \quad dy \quad dz] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cdt \\ dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$

$$= c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

$$dx^\mu dx_\mu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\beta = \frac{V}{c}$$

$$\gamma^2 (1-\beta^2) = 1$$