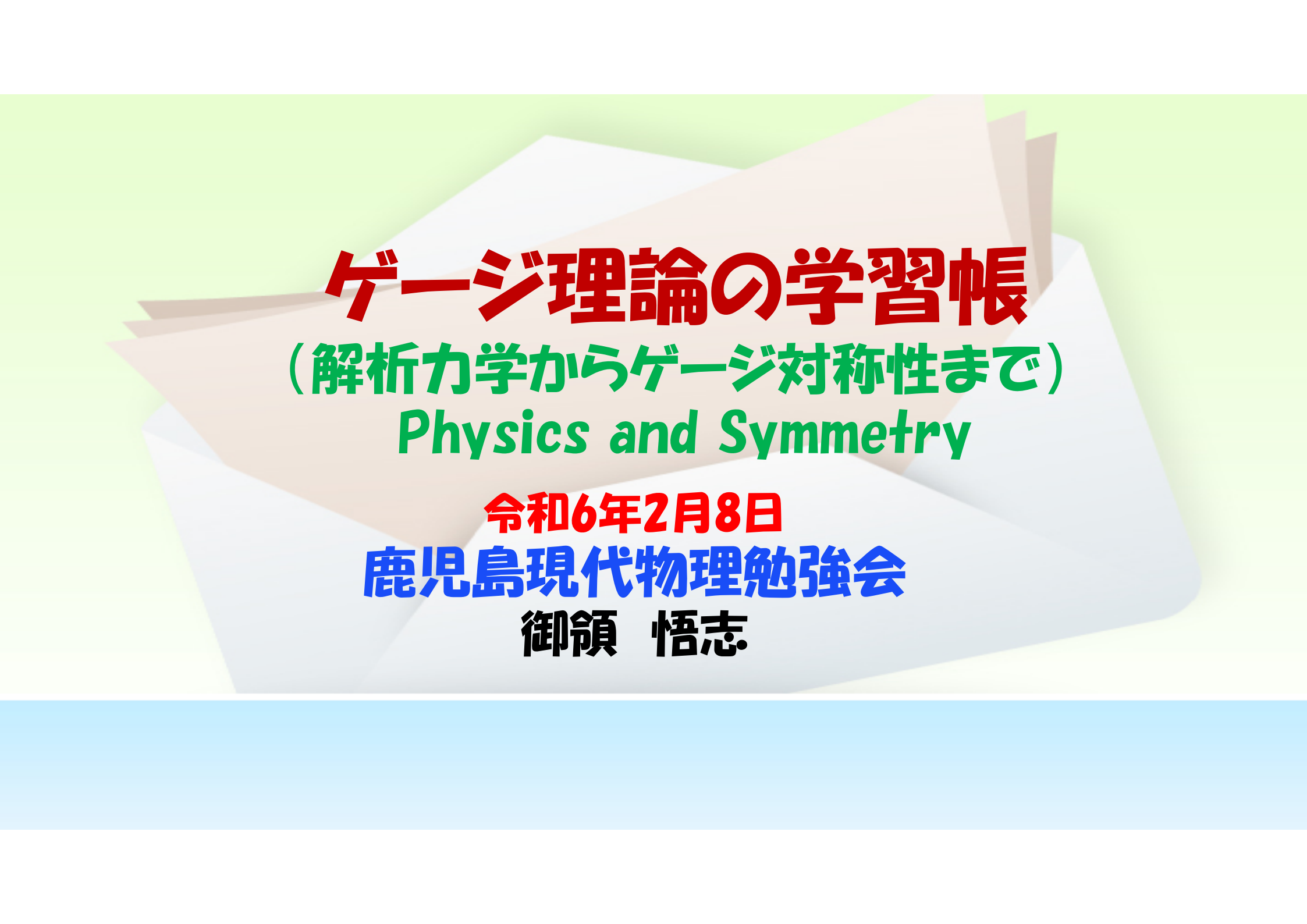




ゲージ理論の学習帳

(解析力学からゲージ対称性まで)
Physics and Symmetry

令和6年2月8日

鹿児島現代物理勉強会

御領 悟志

目次

- 解析力学
- ラグランジュ方程式
- 対称性とは
- 最小作用の原理
- 保存量
- ハミルトニアン
- 一般化運動量・循環座標
- 運動量保存則（並進対称性）
- 角運動量保存則（回転対称性）
- エネルギー保存則（時間対称性）
- 電気量保存則（大域的ゲージ対称性）
- ネーターの定理
- ゲージ理論（ローカルゲージ対称性）
- ゲージ理論（QCDのラグランジアン）
- 格子ゲージ理論（QCDの数値計算）
- 正準量子化
- 物理理論の構造（国立科学博物館作成より）
- $U(2)$ 行列式の絶対値
- $SU(2)$ の一般形

直交座標から一般化座標・解析力学へ

直交座標 $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{3N}\}$ は
 一般化座標を $q = \{q_1, q_2, q_3, \dots, q_{3N}\}$ とすると
 直交座標の x_i は $q = \{q_1, q_2, q_3, \dots, q_{3N}\}$ の関数である。

$$x_i = x_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_{3N}) \quad i = 1, 2, 3, \dots, 3N$$

x_i は q_i を通じて 時刻 t の関数になる。

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j$$

偏微分 $\frac{\partial x_i}{\partial q_j}$ は q の関数なので $\dot{x}_i$ は

q と $\dot{q}$ の関数になる。

$$\dot{x}_i = x_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_{3N}, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dots, \dot{q}_{3N})$$

運動エネルギーを一般化座標で表すと

$$T = \sum_{i=1}^{3N} \frac{m_i}{2} \left\{ \dot{x}_i(q, \dot{q}) \right\}^2$$

$$T = \sum_{i=1}^{3N} \frac{m_i}{2} \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \sum_{l=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_l} \dot{q}_l$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{3N} \sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial x_i}{\partial q_l} \dot{q}_k \dot{q}_l$$

$$a_{kl} = \sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial x_i}{\partial q_l} \text{とおくと}$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{3N} a_{kl}(q) \dot{q}_k \dot{q}_l$$

と表せられる。

ラグランジュ方程式(1)

直交座標 $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{3N}\}$ は
一般化座標を $q = \{q_1, q_2, q_3, \dots, q_{3N}\}$ とすると
直交座標の x_i は $q = \{q_1, q_2, q_3, \dots, q_{3N}\}$ の関数である。

$$x_i = x_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_{3N}) \quad i = 1, 2, 3, \dots, 3N$$

x_i は q_i を通じて 時刻 t の関数になる。

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad \dots \textcircled{1}$$

偏微分 $\frac{\partial x_i}{\partial q_j}$ は q の関数なので $\dot{x}_i$ は

q と $\dot{q}$ の関数になる。

$$\dot{x}_i = \dot{x}_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_{3N}, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dots, \dot{q}_{3N}) \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad \text{なので} \quad \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\text{また} \quad dx_i = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} dq_j \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\text{直交座標で表した時の仕事} \quad \delta W = \sum_{i=1}^{3N} F_i dx_i \quad \dots \textcircled{5}$$

$$\delta W = \sum_{i=1}^{3N} F_i \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} dq_j \quad \dots \textcircled{6}$$

$$\delta W = \sum_{i=1}^{3N} \sum_{j=1}^{3N} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} dq_j = \sum_{j=1}^{3N} \sum_{i=1}^{3N} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} dq_j \quad \dots \textcircled{7}$$

$$Q_j = \sum_{i=1}^{3N} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \quad \dots \textcircled{8} \quad \text{とおくと} \quad \delta W = \sum_{j=1}^{3N} Q_j dq_j$$

ラグランジュ方程式(2)

力がポテンシャルを持つ保存力のとき

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i} \quad \text{なので}$$

$$Q_j = \sum_{i=1}^{3N} \left(-\frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \quad \therefore Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} \quad \dots \textcircled{9}$$

一般化運動量を次の式で定義する

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \quad p_i = \sum_j \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i} \quad \dots \textcircled{10}$$

$$T = \sum_{i=1}^{3N} \frac{m_i}{2} \left\{ \dot{x}_i(q, \dot{q}) \right\}^2 \quad \text{なので} \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} = m_j \dot{x}_j \quad \dots \textcircled{11}$$

⑩に⑪を代入すると

$$p_i = \sum_{j=1}^{3N} m_j \dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^{3N} m_j \dot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \quad \dots \textcircled{12}$$

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^{3N} m_j \dot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right)$$

$$\frac{dp_i}{dt} = \sum_{j=1}^{3N} m_j \ddot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{3N} m_j \dot{x}_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right) \quad \dots \textcircled{13}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i} \quad \frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{3N} m_j \dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i} \quad \dots \textcircled{14}$$

$$\dot{x}_j = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \dot{q}_k$$

ラグランジュ方程式(3)

$$\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_k \partial q_i} \dot{q}_k$$

$$\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_j^{3N} m_j \dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i} = \sum_j^{3N} m_j \dot{x}_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right) \quad \dots \textcircled{15}$$

$$\frac{dp_i}{dt} = \sum_j^{3N} m_j \ddot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} + \sum_j^{3N} m_j \dot{x}_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right) \quad \dots \textcircled{13}$$

⑬に⑮を代入すると

$$\frac{dp_i}{dt} = \sum_j^{3N} F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} + \frac{\partial T}{\partial q_i} \quad \textcircled{8} \text{を代入すると}$$

$$\frac{dp_i}{dt} = Q_i + \frac{\partial T}{\partial q_i}$$

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \quad \text{なので} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = Q_i + \frac{\partial T}{\partial q_i}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad \dots \textcircled{16} \quad Q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} \quad \text{を⑯に代入する。}$$

ラグランジュ方程式(4)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad \dots \textcircled{17}$$

$$\therefore \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (T - U) \right] - \frac{\partial}{\partial q_i} (T - U) = 0 \quad \dots \textcircled{19}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} (T - U) = 0$$

$U = U(q_1, q_2, q_3, \dots, q_{3N})$ なので

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad \dots \textcircled{18}$$

$$T = T(q_1, q_2, q_3, \dots, q_{3N}, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dots, \dot{q}_{3N})$$

$$L = L(q_1, q_2, q_3, \dots, q_{3N}, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dots, \dot{q}_{3N})$$

$$L = T - U$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \dots \textcircled{20}$$

Lagrange's equations of motion

デカルト座標系での
運動方程式・仕事・
位置エネルギーから
一般式を定式化
する流れ

対称性とは

- ある理論が力学変数に対して適当な変換を施しても不変であるとき



- その理論には対称性がある。
- 現代物理の最重要概念（指導原理）

対称性の種類

大域的対称性

- 変換のパラメータが時空点によらない定数であるときの対称性。全時空間で「一斉に同じだけ」変換する。
- ①並進対称性 運動量保存
- ②時間対称性 エネルギー保存
- ③回転対称性 角運動量保存
- ④位相変換対称性 電気量保存
- (グローバルゲージ変換)

局所対称性

- 変換のパラメータが時空点の関数である時の対称性
- ⑤ゲージ対称性 ゲージ理論
-

最小作用の原理

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(q_i, \dot{q}_i) dt$$

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \delta L(q_i, \dot{q}_i) dt$$

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \cdots \textcircled{1}$$

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt$$

$$\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt}(\delta q_i) \quad \text{より}$$

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt}(\delta q_i) \right) dt \cdots \textcircled{2}$$

$$\delta S = \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \delta q_i \right) dt \cdots \textcircled{3}$$

$$\delta q_i(t_0) = \delta q_i(t_1) = 0 \quad \text{なので}$$

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \right) \delta q_i dt = 0 \quad \text{ならば} \cdots \textcircled{4}$$

任意の δq_i において最小が成り立つので

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \right) = 0 \cdots \textcircled{5} \quad \text{オイラー・ラグランジュ方程式}$$

Euler-Lagrange equation

保存量①

$L(q, \dot{q})$ を時間微分する

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \cdots \textcircled{1}$$

オイラー・ラグランジュ方程式より

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \cdots \textcircled{2} \text{を}\textcircled{1} \text{に代入すると}$$

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \cdots \textcircled{3}$$

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \cdots \textcircled{4}$$

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) \cdots \textcircled{5}$$

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = \text{const} \cdots \textcircled{6}$$

保存量②

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q)$$

位置エネルギーが時間微分を含まないとする。

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} \sum_{j=1}^{3N} a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j \cdots \textcircled{6}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{3N} a_{ij}(q) \dot{q}_j + \sum_{k=1}^{3N} a_{ki}(q) \dot{q}_k \right)$$

$a_{ij}(q) = a_{ji}(q)$ の対称性がある。

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{2} \cdot 2 \sum_{j=1}^{3N} a_{ij}(q) \dot{q}_j = \sum_{j=1}^{3N} a_{ij}(q) \dot{q}_j \cdots \textcircled{7}$$

$$\frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \frac{\partial T(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \cdots \textcircled{8}$$

$$\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i$$

$$\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \sum_{i=1}^{3N} \sum_{j=1}^{3N} a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j = 2T \cdots \textcircled{8}$$

⑤に上式⑧を代入すると

$$0 = \frac{d}{dt} (2T - L) = \frac{d}{dt} (2T - (T - U))$$

$$0 = \frac{d}{dt} (T + U) \cdots \textcircled{9}$$

運動エネルギーと位置エネルギーの和が保存される。

$$T + U = E = \text{const} \cdots \textcircled{10}$$

ハミルトニアン(1)

ハミルトニアンについて

$$H = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t) \quad \dots \textcircled{1}$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad \text{一般化運動量を定義すると}$$

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t) \quad \dots \textcircled{2}$$

ハミルトニアンの全微分をとると

$$dH = \sum_i \left(\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - \frac{\partial L(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) - \frac{\partial L(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial t} dt$$

$$dH = \sum_i \left(\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - \frac{\partial L(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial q_i} dq_i - p_i d\dot{q}_i \right) - \frac{\partial L(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial t} dt$$

$$dH = \sum_i \left(\dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial q_i} dq_i \right) - \frac{\partial L(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial t} dt \quad \dots \textcircled{3}$$

オイラー・ラグランジュ方程式より

$$\frac{\partial L(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{dp_i}{dt} \quad \dots \textcircled{4}$$

④を③式に代入する

ハミルトニアン(2)

$$dH = \sum_i \left(\dot{q}_i dp_i - \frac{dp_i}{dt} dq_i \right) - \frac{\partial L(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial t} dt \quad \dots \textcircled{5}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{dp_i}{dt} \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad \text{とおけば}$$

$H = H(q_i, p_i, t)$ と書ける。

$$\left[\begin{array}{l} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{array} \right] \quad \text{ハミルトンの正準方程式}$$

⑤からHの時間微分を求めると

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \left(\dot{q}_i \frac{dp_i}{dt} - \frac{dp_i}{dt} \frac{dq_i}{dt} \right) - \frac{\partial L(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial t} \quad \dots \textcircled{6}$$

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \left(\dot{q}_i \frac{dp_i}{dt} - \frac{dp_i}{dt} \dot{q}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \quad \dots \textcircled{7}$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad \dots \textcircled{8}$$

Hが、あらわに時間に依存しない関数の時にはHは一定で保存される。このことは次からも導ける。

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) \quad \dots \textcircled{9}$$

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0 \quad \dots \textcircled{10}$$

一般化運動量・循環座標

運動エネルギー

$$T = \sum_{i=1}^{3N} \frac{m_i}{2} \left\{ \dot{x}_i(q, \dot{q}) \right\}^2$$

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i \cdots \textcircled{1}$$

ここで次のように一般化運動量を定義する

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \cdots \textcircled{2}$$

$L = T(q, \dot{q}) - U(q)$ ならば

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{dp_i}{dt} = 0$$

L が $\dot{q}_i$ のみの関数の場合

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

$$\therefore \frac{dp_i}{dt} = 0$$

$$p_i = \text{const}$$

ここで q_i を循環座標という。

運動量保存則(並進対称性)

$$L = T(r_1, \dots, r_N, \dot{r}_1, \dots, \dot{r}_N) - U(r_1, \dots, r_N)$$

$$U(r_1, \dots, r_N) = \sum_{i < j} U_{ij}(r_i - r_j)$$

各粒子を同じだけ $\vec{\varepsilon}$ 並進移動させる。

それでもラグランジアンが変化せず保存されるとき

$$L(r_1 + \vec{\varepsilon}, \dots, r_N + \vec{\varepsilon}, \dot{r}_1, \dots, \dot{r}_N) = L(r_1, \dots, r_N, \dot{r}_1, \dots, \dot{r}_N)$$

$$\vec{\varepsilon} = \varepsilon_x \vec{e}_x + \varepsilon_y \vec{e}_y + \varepsilon_z \vec{e}_z$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} \vec{e}_x + \frac{\partial L}{\partial y_i} \vec{e}_y + \frac{\partial L}{\partial z_i} \vec{e}_z$$

$$\sum_i \vec{\varepsilon} \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0$$

$\vec{\varepsilon}$ がいかなる方向についても成り立つには

$$\sum_i \vec{\varepsilon} \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = \vec{\varepsilon} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0 \quad \therefore \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = 0$$

$$\therefore \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \vec{e}_x + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \vec{e}_y + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \vec{e}_z \right) = const$$

$$\vec{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \vec{e}_x + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \vec{e}_y + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \vec{e}_z \quad \text{なので}$$

$$\vec{p} = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \vec{e}_x + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \vec{e}_y + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \vec{e}_z \right) = \sum_i \vec{p}_i = const$$

並進対称性があるときには、運動量保存則が成り立つことを示す。

角運動量保存則(回転対称性)

$$L = T(r_1, \dots, r_N, \dot{r}_1, \dots, \dot{r}_N) - U(r_1, \dots, r_N)$$

$$U(r_1, \dots, r_N) = \sum_{i < j} U_{ij}(r_i - r_j)$$

各粒子を回転させる。

そのときラグランジアンが変化せず保存される場合

$$\begin{aligned} L(\vec{r}_1 + \delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N + \delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_N, \vec{v}_1 + \delta\vec{\varphi} \times \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N + \delta\vec{\varphi} \times \vec{v}_N) \\ = L(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N + \delta\vec{\varphi} \times \vec{v}_N) \end{aligned}$$

$$\delta\vec{\varphi} = \delta\varphi_x \vec{e}_x + \delta\varphi_y \vec{e}_y + \delta\varphi_z \vec{e}_z$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} \vec{e}_x + \frac{\partial L}{\partial y_i} \vec{e}_y + \frac{\partial L}{\partial z_i} \vec{e}_z \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \vec{e}_x + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \vec{e}_y + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \vec{e}_z$$

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \cdot (\delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_i) + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot (\delta\vec{\varphi} \times \vec{v}_i) = 0$$

$$\sum_i \delta\vec{\varphi} \left(\vec{r}_i \times \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \right) + \sum_i \delta\vec{\varphi} \left(\vec{v}_i \times \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \right) = 0$$

$$\delta\vec{\varphi} \sum_i \left(\vec{r}_i \times \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} + \vec{v}_i \times \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \right) = 0$$

$$\delta\vec{\varphi} \sum_i \frac{d}{dt} \left(\vec{r}_i \times \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \right) = 0$$

$$\sum_i \frac{d}{dt} \left(\vec{r}_i \times \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \right) = \sum_i \frac{d}{dt} (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = 0$$

$$\vec{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \vec{e}_x + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \vec{e}_y + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \vec{e}_z$$

$$\sum_i (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \text{const}$$

回転対称性があるときには、角運動量保存則が成り立つことを示す。

エネルギー保存則(時間対称性)

$t \rightarrow t + \delta t$ と微小時間が経過したときでも
ラグランジアンが変化せず保存されるとき

$$L(r_1, \dots, r_N, \dot{r}_1, \dots, \dot{r}_N, t) = L(r_1, \dots, r_N, \dot{r}_1, \dots, \dot{r}_N, t + \delta t)$$

$L(q, \dot{q}, t)$ を時間微分する

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \dots \textcircled{1}$$

オイラー・ラグランジュ方程式より

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dots \textcircled{2} \text{を}\textcircled{1} \text{に代入すると}$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \dots \textcircled{3}$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \dots \textcircled{4}$$

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) \dots \textcircled{5}$$

時間の微小変化 δt 後に L が変化しないので

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \dots \textcircled{6}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) = 0 \dots \textcircled{7}$$

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = \text{const} \dots \textcircled{8}$$

保存量②でのべた通り

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = T + U = E(\text{一定})$$

エネルギー保存則が導かれる。

電気量保存則(大域的ゲージ対称性)①

自由電子の Lagrangian $\mathfrak{L}$ は

$$\mathfrak{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \quad \psi \Rightarrow \psi \exp(ig\theta)$$

$\psi \rightarrow \psi + \delta\psi$ $\delta\psi = ig\theta\psi$ のとき

$$\delta\mathfrak{L} = 0$$

$$\delta\mathfrak{L} = \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\psi}\delta\psi + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\delta(\partial_\mu\psi) + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\bar{\psi}}\delta\bar{\psi} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\delta(\partial_\mu\bar{\psi}) = 0$$

$\delta\mathfrak{L}$ には $\partial_\mu\bar{\psi}$ の項がないので $\bar{\psi}$ の項は寄与しない。

オイラーラグランジュ方程式から

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\psi} = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} \right)$$

$$\partial_\mu(\delta\psi) = \delta(\partial_\mu\psi) \text{ なので}$$

$$\delta\mathfrak{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} \right) \delta\psi + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} \partial_\mu(\delta\psi) = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} \delta\psi \right) = 0$$

$$\delta\mathfrak{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} ig\theta\psi \right) = ig\theta \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} \psi \right) = 0$$

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} = i\bar{\psi}\gamma^\mu \text{ なので}$$

$$\delta\mathfrak{L} = ig\theta \partial_\mu (i\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = i\theta \partial_\mu (ig\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = 0$$

$$j^\mu = g\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \text{ とおけば}$$

$$i\theta \partial_\mu (j^\mu) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\theta \partial_\mu j^\mu = 0$$

$$\therefore \partial_\mu j^\mu = 0$$

$$4\text{元カレント密度を } j^\mu \text{ とおくと } j^\mu = (\rho, \vec{j})$$

$$\partial_\mu j^\mu = \partial_0\rho + \partial_1j^1 + \partial_2j^2 + \partial_3j^3 = \frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x}j^1 + \frac{\partial}{\partial y}j^2 + \frac{\partial}{\partial z}j^3 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x}j^1 + \frac{\partial}{\partial y}j^2 + \frac{\partial}{\partial z}j^3 = \frac{\partial}{\partial t}\rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

電気量保存則(大域的ゲージ対称性)②

$$\begin{aligned} & \int \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} j^1 + \frac{\partial}{\partial y} j^2 + \frac{\partial}{\partial z} j^3 \right) dt dx dy dz \\ &= \int \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \right) dt dx dy dz = 0 \\ &= \int \frac{\partial}{\partial t} \rho dt dx dy dz + dt \int \vec{\nabla} \cdot \vec{j} dx dy dz = 0 \end{aligned}$$

無限遠においては

$$\vec{j} = 0$$

$$\int \rho dx dy dz + dt \int \vec{j} \cdot \vec{ds} = 0$$

$$dQ + dt \cdot 0 = 0$$

$$\frac{dQ}{dt} = 0$$

$$\therefore Q = \text{const}$$

Qはバリオン数(レプトン数)を示す。

(結論) 大域的ゲージ不変なら電気量が保存される。
電気量保存則はゲージ対称性から導かれる。

ネーターの定理

・ 微小座標変換のときラグランジアンが保存され、力学変数の変化がオイラー・ラグランジュの方程式に従うものとする。

$L(q, \dot{q})$

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \cdots \textcircled{1}$$

$$\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt}(\delta q_i) \text{ より}$$

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt}(\delta q_i) \cdots \textcircled{2}$$

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{d}{dt} \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right] - \sum_i \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \delta q_i \cdots \textcircled{3}$$

$$\delta L = \sum \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \right) \delta q_i + \frac{d}{dt} \sum \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right] \cdots \textcircled{4}$$

無限小変換においてラグランジアンが保存される。 $\delta L = 0$ のとき

$$\frac{d}{dt} \sum \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right] = 0 \cdots \textcircled{5} \quad \therefore \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i = \text{const} \cdots \textcircled{6}$$

$q_i \rightarrow q_i + \varepsilon S_i(q)$ とおけるとき

すなわち $\delta q_i = \varepsilon S_i(q)$ と書ければ⑤式は

$$\frac{d}{dt} \sum \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right] = \frac{d}{dt} \sum \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \varepsilon S_i(q) \right] = \varepsilon \frac{d}{dt} \sum \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} S_i(q) \right] = 0$$

$$\sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} S_i(q) \right] = \text{const} \cdots \textcircled{7}$$

上記のような保存量が導ける。

ゲージ理論(ローカルゲージ対称性)①

電磁場の存在しない自由空間における電子のラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \Rightarrow \mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi$$

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$$

$$\bar{\psi} = \begin{bmatrix} \psi_1^* & \psi_2^* & \psi_3^* & \psi_4^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \psi_1^* & \psi_2^* & -\psi_3^* & -\psi_4^* \end{bmatrix}$$

$\psi \Rightarrow \exp(i\theta)\psi$ とするところでは θ は定数となる。

$$\bar{\psi} = [(\exp(i\theta)\psi_1)^* \quad (\exp(i\theta)\psi_2)^* \quad -(\exp(i\theta)\psi_3)^* \quad -(\exp(i\theta)\psi_4)^*]$$

$$\bar{\psi} = \exp(-i\theta) [\psi_1^* \quad \psi_2^* \quad -\psi_3^* \quad -\psi_4^*] = \exp(-i\theta)\bar{\psi}$$

と置き換えられ、これをラグランジアンに代入すると

$$\mathcal{L} = i \exp(-i\theta)\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \exp(i\theta)\psi - m \exp(-i\theta)\bar{\psi} \exp(i\theta)\psi$$

$$= i \exp(-i\theta) \exp(i\theta) \bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \exp(-i\theta) \exp(i\theta) \bar{\psi}\psi$$

$$= i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$$

グローバル位相変換ではラグランジアンは不変である。
(四次元時空の全ての点で θ だけ共通に回転させる)

ゲージ理論(ローカルゲージ対称性)②

スピノール場の位相 θ が定数でなく x_ν の実関数として $\theta = \theta(x_\nu)$ であるときについて

$\psi \Rightarrow \exp(i\theta(x_\nu))\psi$ 位相を時空間各点で独立に回転させる。

$$\mathfrak{L} = i \exp[-i\theta(x_\nu)] \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu (\exp[i\theta(x_\nu)] \psi) - m \exp[-i\theta(x_\nu)] \bar{\psi} \exp[i\theta(x_\nu)] \psi$$

$$\mathfrak{L} = i \exp[-i\theta(x_\nu)] \bar{\psi} \gamma^\mu \exp[i\theta(x_\nu)] \partial_\mu \psi + i \exp[-i\theta(x_\nu)] \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu i\theta(x_\nu)) \exp[i\theta(x_\nu)] \psi \\ - m \exp[-i\theta(x_\nu)] \bar{\psi} \exp[i\theta(x_\nu)] \psi$$

$$\mathfrak{L} = i \exp[-i\theta(x_\nu)] \exp[i\theta(x_\nu)] \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + i \exp[-i\theta(x_\nu)] \exp[i\theta(x_\nu)] \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu i\theta(x_\nu)) \psi \\ - m \exp[-i\theta(x_\nu)] \exp[i\theta(x_\nu)] \bar{\psi} \psi$$

$$\mathfrak{L} = i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi - (\partial_\mu \theta(x_\nu)) \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$$

$$\mathfrak{L} \Rightarrow \mathfrak{L} - (\partial_\mu \theta(x_\nu)) \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad \longrightarrow \quad \text{ラグランジアンは不変ではない。}$$

ゲージ理論(ローカルゲージ対称性)③

ラグランジアンが、逆にローカルゲージ変換で不変であるローカルゲージ変換を基本原理におく。

ゲージ場 $A(x^\nu)$ を導入して微分を変更する。

$$\partial_\mu \Rightarrow D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu \quad \text{共変微分と呼ぶ。}$$

ゲージ場をローカルゲージ変換で次のように変換する

$$A_\mu \Rightarrow A_\mu - \frac{1}{q} \partial_\mu \theta(x^\nu)$$

$\theta = \theta(x_\nu)$ は任意の実関数なので電子の電荷の大きさに比例するものと定義しなおす。

$\theta(x_\nu) = q\chi(x_\nu)$ とすると、ゲージ場は

$$A_\mu \Rightarrow A_\mu - \frac{1}{q} \partial_\mu q\chi(x^\nu) = A_\mu - \partial_\mu \chi(x^\nu) \quad \text{と変換される。}$$

ゲージ理論(ローカルゲージ対称性)④

$\psi \Rightarrow \exp[iq\chi(x^\nu)]\psi$ とおき、共変微分をとると

$$\begin{aligned} D_\mu \psi &\Rightarrow [\partial_\mu + iq(A_\mu - \partial_\mu \chi(x^\nu))] \exp[iq\chi(x^\nu)] \psi \\ &= \partial_\mu (\exp[iq\chi(x^\nu)] \psi) + iq(A_\mu - \partial_\mu \chi(x^\nu)) \exp[iq\chi(x^\nu)] \psi \\ &= \exp[iq\chi(x^\nu)] \partial_\mu \psi + iq \partial_\mu \chi(x^\nu) \exp[iq\chi(x^\nu)] \psi \\ &\quad + iq(A_\mu - \partial_\mu \chi(x^\nu)) \exp[iq\chi(x^\nu)] \psi \\ &= \exp[iq\chi(x^\nu)] \partial_\mu \psi + iq A_\mu \exp[iq\chi(x^\nu)] \psi \\ &= \exp[iq\chi(x^\nu)] (\partial_\mu + iq A_\mu) \psi \\ &= \exp[iq\chi(x^\nu)] D_\mu \psi \end{aligned}$$

ゲージ理論(ローカルゲージ対称性)⑤

$$\begin{aligned}\mathfrak{L} &= i \exp[-iq \chi(x^\nu)] \bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \exp[iq \chi(x^\nu)] \psi \\ &\quad - m \exp[-iq \chi(x^\nu)] \bar{\psi} \exp[iq \chi(x^\nu)] \psi \\ &= i \exp[-iq \chi(x^\nu)] \bar{\psi} \gamma^\mu \exp[iq \chi(x^\nu)] D_\mu \psi \\ &\quad - m \exp[-iq \chi(x^\nu)] \bar{\psi} \exp[iq \chi(x^\nu)] \psi \\ &= i \bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi\end{aligned}$$

$$\mathfrak{L} = \bar{\psi} \left(i \gamma^\mu D_\mu - m \right) \psi$$

ラグランジアンがゲージ場の下で共変微分により不変であることが示される。

ラグランジアン(ローカルゲージ対称性)

$$\mathfrak{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu (\partial_\mu + iqA_\mu) - m) \psi$$

$$\mathfrak{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi - (q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)A_\mu$$

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \rightarrow \text{ディラック波の確率密度の流れの式}$$

$$A^\mu = [\phi \quad A_x \quad A_y \quad A_z]$$

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

$$\vec{F}^{0i} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla \phi$$

$$F^{0i} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = \frac{\partial A^i}{\partial x_0} - \frac{\partial A^0}{\partial x_i} = \frac{\partial A^i}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

$$F^{01} = \partial^0 A^1 - \partial^1 A^0 = \frac{\partial A^1}{\partial x_0} - \frac{\partial A^0}{\partial x_1} = \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} = -E_x$$

$$F^{02} = \partial^0 A^2 - \partial^2 A^0 = \frac{\partial A^2}{\partial x_0} - \frac{\partial A^0}{\partial x_2} = \frac{\partial A_y}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial y} = -E_y$$

$$F^{03} = \partial^0 A^3 - \partial^3 A^0 = \frac{\partial A^3}{\partial x_0} - \frac{\partial A^0}{\partial x_3} = \frac{\partial A_z}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial z} = -E_z$$

ゲージ理論(ローカルゲージ対称性)⑤

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu \quad \psi' = \exp[iq\chi(x^\nu)]\psi \quad A_\mu = A_\mu - \partial_\mu\chi(x^\nu)$$

$$\begin{aligned} D_\mu \psi' &= [\partial_\mu + iq(A_\mu - \partial_\mu\chi(x^\nu))] \exp[iq\chi(x^\nu)]\psi \\ &= \partial_\mu(\exp[iq\chi(x^\nu)]\psi) + iq(A_\mu - \partial_\mu\chi(x^\nu)) \exp[iq\chi(x^\nu)]\psi \\ &= \partial_\mu(\exp[iq\chi(x^\nu)])\psi + \exp[iq\chi(x^\nu)]\partial_\mu\psi + iq(A_\mu - \partial_\mu\chi(x^\nu)) \exp[iq\chi(x^\nu)]\psi \\ &= \exp[iq\chi(x^\nu)](\partial_\mu + iq\partial_\mu\chi(x^\nu))\psi + iq(A_\mu - \partial_\mu\chi(x^\nu)) \exp[iq\chi(x^\nu)]\psi \\ &= \exp[iq\chi(x^\nu)](\partial_\mu + iq\partial_\mu\chi(x^\nu))\psi + \exp[iq\chi(x^\nu)]iq(A_\mu - \partial_\mu\chi(x^\nu))\psi \\ &= \exp[iq\chi(x^\nu)]\{(\partial_\mu + iq\partial_\mu\chi(x^\nu)) + iq(A_\mu - \partial_\mu\chi(x^\nu))\}\psi \\ &= \exp[iq\chi(x^\nu)]\{(\partial_\mu + iq\partial_\mu\chi(x^\nu)) + (iqA_\mu - iq\partial_\mu\chi(x^\nu))\}\psi \\ &= \exp[iq\chi(x^\nu)]\{\partial_\mu + iq\partial_\mu\chi(x^\nu) + iqA_\mu - iq\partial_\mu\chi(x^\nu)\}\psi \\ &= \exp[iq\chi(x^\nu)](\partial_\mu + iqA_\mu)\psi = \exp[iq\chi(x^\nu)]D_\mu\psi \end{aligned}$$

ゲージ理論(ローカルゲージ対称性)⑥

$$\psi' = \exp[igT \cdot \theta(x^\nu)]\psi \quad D_\mu = \partial_\mu + igW_{\mu,a}(x)T_a$$

Tは行列 QCDでは 3×3 列 SU(3)のゲージ群

以下の交換関係を満たす。これら演算子は交換しない。→ 非可換

$$\psi = \begin{pmatrix} q_r \\ q_g \\ q_b \end{pmatrix} \quad [T_a, T_b] = if_{abc} T_c \quad a,b,c=1,2,3,4,5,6,7,8$$

q→クォーク場 r,g,b→ 色電荷 T →色電荷に対する行列

$$\mathfrak{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}W_a^{\mu\nu}W_{\mu\nu,a}$$

$$W_a^{\mu\nu} = \partial^\nu W_a^\mu - \partial^\mu W_a^\nu + gf_{abc}W_b^\mu W_c^\nu$$

ゲージ理論(QCDのラグランジアン)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a + \bar{q} \gamma^\mu (i\partial_\mu - g t^a A_\mu^a) q - m \bar{q} q$$

QEDのラグランジアンとの比較

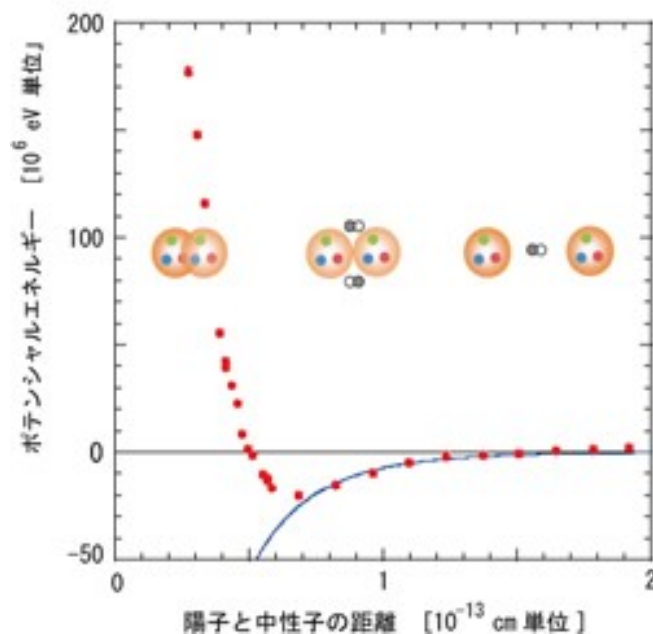
$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu (\partial_\mu + iqA_\mu) - m) \psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ &= \bar{\psi} \gamma^\mu (i\partial_\mu + iqA_\mu) \psi - m \bar{\psi} \psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \bar{\psi} \gamma^\mu (i\partial_\mu - qA_\mu) \psi - m \bar{\psi} \psi\end{aligned}$$

格子ゲージ理論(QCDの数値計算)の1

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a + \bar{q} \gamma^\mu (i\partial_\mu - g t^a A_\mu^a) q - m \bar{q} q$$

- QCDのラグランジアンを解析的に解くことは難しい。
- 時空を細かな格子状に分ける。
- モンテカルロ法を用いて計算する。
- 斥力芯などかなりの精度で表現可能。
- 初田哲男教授(理研)らのグループが初めて数値計算に成功した。(10年ほど前)
- 核力の起源を量子色力学から解明することに世界で初めて成功。

格子ゲージ理論(QCDの数値計算)の2



グラフは理研のHPから
そのまま借用しています。

- 至近距離での斥力芯の存在は、宇宙に浮かぶ巨大な原子核である 中性子星の内部構造の研究、超新星爆発の起爆原因解明に大きなインパクト

正準量子化

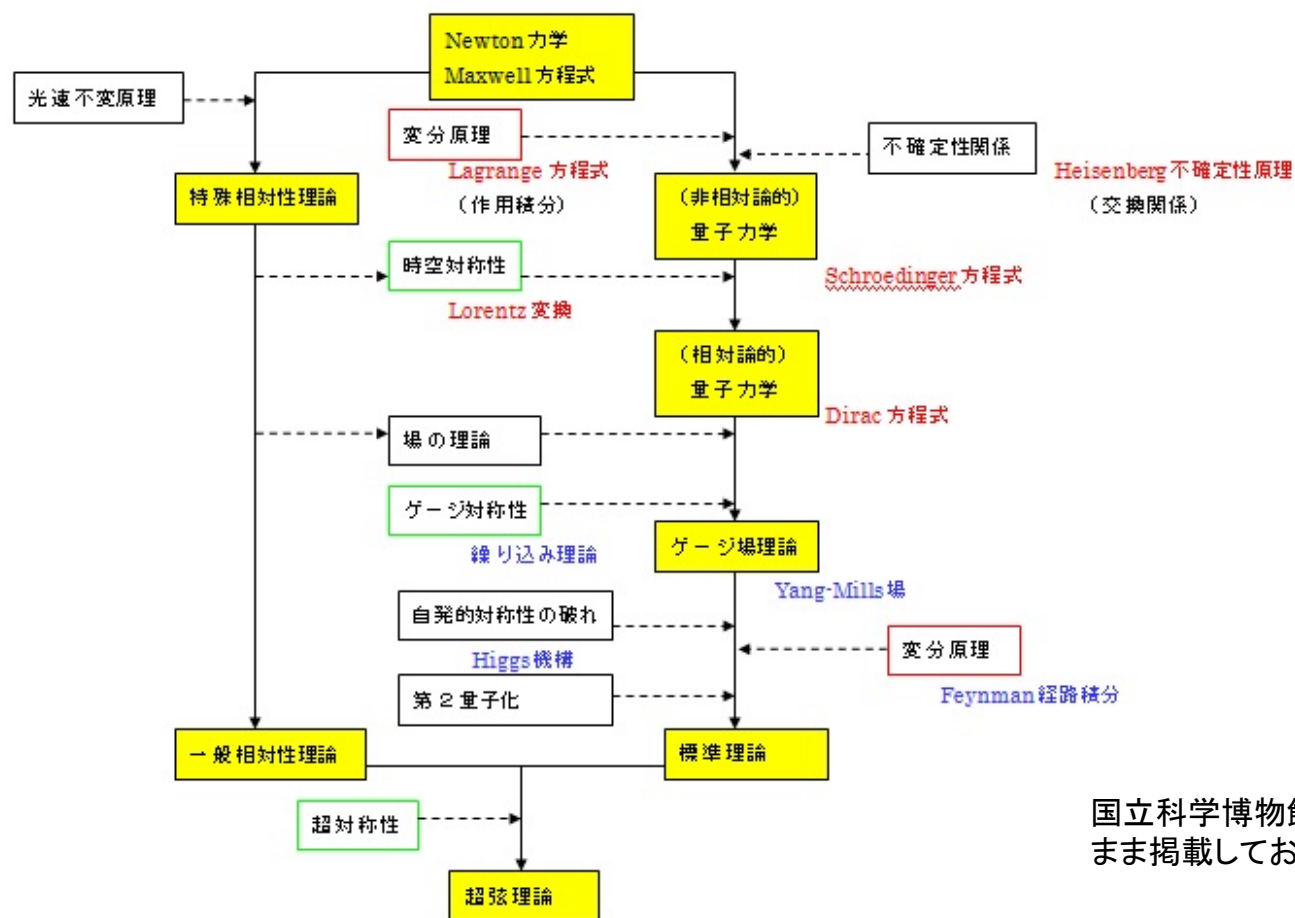
$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt \quad \cdots \textcircled{1} \quad p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^r} \quad H(q, p) = \sum_{r=1} p_r \dot{q}^r - L(q, \dot{q}, t)$$

$$\begin{aligned} [q^r, p_s] &= q^r p_s - p_s q^r = i\delta_s^r & [q^r, q^s] &= q^r q^s - q^s q^r = 0 \\ [p_r, p_s] &= p_r p_s - p_s p_r = 0 \end{aligned}$$

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_s = H(q, p, t) |\psi(t)\rangle_s$$

$$|\psi(t)\rangle_s = U(t) |\psi(0)\rangle_s \quad U(t) = T \exp \left[-i \int_0^t H(t') dt' \right]$$

物理理論の構造（国立科学博物館作成より）



国立科学博物館HPより拝借し、そのまま掲載しております。

U (2) 行列式の絶対値

$$\alpha = \det V = |\alpha| e^{i\theta} \quad \text{とおくと}$$

$$\det V^{t*} = \det V^* = \det \bar{V} = \overline{\det V} = \bar{\alpha} = |\alpha| e^{-i\theta}$$

$$\det(VV^{t*}) = \det V \det V^{t*} = \det V \det V^* = \alpha \bar{\alpha}$$

$$\det(VV^{t*}) = \det E = 1$$

$$\alpha \bar{\alpha} = |\alpha| e^{i\theta} |\alpha| e^{-i\theta} = |\alpha|^2 = 1$$

$$\therefore |\alpha| = 1$$

また

$$|\det V| = ||\alpha| e^{i\theta}| = |\alpha| |e^{i\theta}| = |\alpha|$$

$$\therefore |\det V| = 1$$

U(2) の一般形①

2×2のユニタリ行列の一般形Vを求める。

$$U(2) \quad V = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

$$VV^{t*} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ \bar{\beta} & \bar{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} & \alpha\bar{\gamma} + \beta\bar{\delta} \\ \gamma\bar{\alpha} + \delta\bar{\beta} & \gamma\bar{\gamma} + \delta\bar{\delta} \end{bmatrix}$$

$$|\det V| = 1 \quad \text{なので}$$

$$\det V = \alpha\delta - \beta\gamma = e^{i\theta}$$

$$\begin{aligned} \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} &= 1 & \gamma\bar{\gamma} + \delta\bar{\delta} &= 1 & \delta &= -\gamma \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} \\ \gamma\bar{\alpha} + \delta\bar{\beta} &= 0 & \alpha\bar{\gamma} + \beta\bar{\delta} &= 0 \end{aligned}$$

$$V^{t*} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ \bar{\beta} & \bar{\delta} \end{bmatrix}$$

$$-\gamma\alpha\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} - \beta\gamma = e^{i\theta} \quad \gamma\left(\alpha\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} + \beta\right) = -e^{i\theta}$$

$$VV^{t*} = E \quad \text{なので}$$

$$\gamma(\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta}) = -\bar{\beta}e^{i\theta} \quad \gamma = -\bar{\beta}e^{i\theta}$$

U (2) の一般形②

$$\delta = -\gamma \frac{\overline{\alpha}}{\beta}$$

$$\delta = \overline{\beta} e^{i\theta} \frac{\overline{\alpha}}{\beta} = \overline{\alpha} e^{i\theta}$$

$$V = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} e^{i\theta} & \overline{\alpha} e^{i\theta} \end{bmatrix}$$

$$\alpha = \alpha' e^{i\frac{\theta}{2}} \quad \beta = \beta' e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$\overline{\alpha} = \overline{\alpha'} e^{-i\frac{\theta}{2}} \quad \overline{\beta} = \overline{\beta'} e^{-i\frac{\theta}{2}}$$

と置きなおすと

$$\alpha \overline{\alpha} = \alpha' \overline{\alpha'} e^{i\frac{\theta}{2}} e^{-i\frac{\theta}{2}} = \alpha' \overline{\alpha'}$$

$$\beta \overline{\beta} = \beta' \overline{\beta'} e^{i\frac{\theta}{2}} e^{-i\frac{\theta}{2}} = \beta' \overline{\beta'}$$

$$\alpha \overline{\alpha} + \beta \overline{\beta} = \alpha' \overline{\alpha'} + \beta' \overline{\beta'} = 1$$

$$V = \begin{bmatrix} \alpha' e^{i\frac{\theta}{2}} & \beta' e^{i\frac{\theta}{2}} \\ -\overline{\beta'} e^{-i\frac{\theta}{2}} e^{i\theta} & \overline{\alpha'} e^{-i\frac{\theta}{2}} e^{i\theta} \end{bmatrix} = e^{i\frac{\theta}{2}} \begin{bmatrix} \alpha' & \beta' \\ -\overline{\beta'} & \overline{\alpha'} \end{bmatrix}$$

2×2のユニタリ一般形Vである。

SU(2)の一般形①

$$V = e^{i\frac{\theta}{2}} \begin{bmatrix} \alpha' & \beta' \\ -\overline{\beta'} & \overline{\alpha'} \end{bmatrix}$$

Vは群U(2)の元

$$e^{i\frac{\theta}{2}} \text{ は、U(1)の元}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha' & \beta' \\ -\overline{\beta'} & \overline{\alpha'} \end{bmatrix} \text{ は群SU(2)の元}$$

U(2)の元がU(1)とSU(2)の元の積で表される。

$$U(2) = U(1) \otimes SU(2)$$

SU(2)の元の一般形は

$$U = \begin{bmatrix} \alpha' & \beta' \\ -\overline{\beta'} & \overline{\alpha'} \end{bmatrix} \quad \alpha' \overline{\alpha'} + \beta' \overline{\beta'} = 1$$

Uの一般形を改めてかくと

$$U = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{bmatrix} \quad \alpha \overline{\alpha} + \beta \overline{\beta} = 1$$

$$\alpha = x_1 + ix_2 \quad \overline{\alpha} = x_1 - ix_2$$

$$\beta = x_3 + ix_4 \quad \overline{\beta} = x_3 - ix_4$$

$$(x_1 + ix_2)(x_1 - ix_2) + (x_3 + ix_4)(x_3 - ix_4) = 1$$

SU(2) の一般形②

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 \quad \alpha \bar{\alpha} + \beta \bar{\beta} = 1$$

$$U = \begin{bmatrix} x_1 + ix_2 & x_3 + ix_4 \\ -x_3 + ix_4 & x_1 - ix_2 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ix_2 & 0 \\ 0 & -ix_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & x_3 \\ -x_3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & ix_4 \\ ix_4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U = x_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

$$U = x_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + ix_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + ix_3 \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} + ix_4 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U = ix_4 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + ix_3 \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} + ix_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + x_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

添え字の順番を逆にすると

$$U = ix_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + ix_2 \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} + ix_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \sigma_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SU(2) の一般形③ (パウリ行列)

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \sigma_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E$$

$$\sigma_1^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \sigma_1 \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = i \sigma_3 \quad \sigma_2 \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = -i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -i \sigma_3$$

$$\sigma_2^2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \sigma_2 \sigma_3 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = i \sigma_1 \quad \sigma_3 \sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} = -i \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -i \sigma_1$$

$$\sigma_3^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \sigma_3 \sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = i \sigma_2 \quad \sigma_1 \sigma_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -i \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = -i \sigma_2$$

$$\sigma_4^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_4^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = E$$

$SU(2)$ の一般形④ (パウリ行列)

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \sigma_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E$$

$$\det \sigma_1 = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1$$

$$\det \sigma_2 = \det \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = -1$$

$$\det \sigma_3 = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -1$$

$$U = ix_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + ix_2 \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} + ix_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = ix_1 \sigma_1 + ix_2 \sigma_2 + ix_3 \sigma_3 + x_4 E$$

$$\alpha = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)$$

$$U = i\alpha\sigma + x_4 E$$

$SU(2)$ の一般形⑤ (パウリ行列)

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \sigma_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E$$

$\mathcal{E}_{jkl}$ の定義

偶置換と奇置換

$$\mathcal{E}_{123} = 1 \quad \mathcal{E}_{231} = 1 \quad \mathcal{E}_{312} = 1 \quad \cdots \text{偶置換}$$

$$\mathcal{E}_{132} = -1 \quad \mathcal{E}_{213} = -1 \quad \mathcal{E}_{321} = -1 \quad \cdots \text{奇置換}$$

$$\mathcal{E}_{jkl} \rightarrow \text{sgn} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_j \sigma_k = \delta_{jk} E + i \sum_{l=1}^3 \mathcal{E}_{jkl} \sigma_l \quad j, k = 1, 2, 3$$

SU(2) の一般形⑥ (パウリ行列)

$$\vec{\sigma} = (\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3) \quad \mathbf{a} = (a_1 \quad a_2 \quad a_3) \quad \mathbf{b} = (b_1 \quad b_2 \quad b_3) \quad \sigma_j \sigma_k = \delta_{jk} E + i \sum_{l=1}^3 \varepsilon_{jkl} \sigma_l \quad j, k = 1, 2, 3$$

$$(\mathbf{a} \cdot \vec{\sigma}) = a_1 \sigma_1 + a_2 \sigma_2 + a_3 \sigma_3$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \cdot \vec{\sigma})(\mathbf{b} \cdot \vec{\sigma}) &= \left(\sum_{j=1}^3 a_j \sigma_j \right) \left(\sum_{k=1}^3 b_k \sigma_k \right) = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_j \sigma_j b_k \sigma_k = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sigma_j \sigma_k a_j b_k \\ &= \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sigma_j \sigma_k a_j b_k = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \left(\delta_{jk} E + i \sum_{l=1}^3 \varepsilon_{jkl} \sigma_l \right) a_j b_k = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \delta_{jk} a_j b_k E + i \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \sigma_l \varepsilon_{jkl} a_j b_k \\ &= E \sum_{j=1}^3 a_j b_j + i \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sigma_l \varepsilon_{ljk} a_j b_k = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) E + i \sum_{l=1}^3 \sigma_l (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_l = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) E + i \vec{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \end{aligned}$$

$$(\mathbf{a} \cdot \vec{\sigma})(\mathbf{b} \cdot \vec{\sigma}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) E + i \vec{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

SU(2) の一般形⑦ (パウリ行列)

外積の成分表示

$$(a \times b)_j = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \varepsilon_{jkl} a_k b_l$$
$$j = 1, 2, 3$$

$$(a \times b)_1 = \varepsilon_{123} a_2 b_3 + \varepsilon_{132} a_3 b_2 = a_2 b_3 - a_3 b_2$$

$$(a \times b)_2 = \varepsilon_{231} a_3 b_1 + \varepsilon_{213} a_1 b_3 = a_3 b_1 - a_1 b_3$$

$$(a \times b)_3 = \varepsilon_{312} a_1 b_2 + \varepsilon_{321} a_2 b_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{123} &= 1 & \varepsilon_{231} &= 1 & \varepsilon_{312} &= 1 \\ \varepsilon_{132} &= -1 & \varepsilon_{213} &= -1 & \varepsilon_{321} &= -1 \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij}$$

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{kji} = -\varepsilon_{ikj}$$

$$\varepsilon_{ikl} \varepsilon_{jkl} = 2\delta_{ij}$$

$$\varepsilon_{ijm} \varepsilon_{klm} = \delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}$$

ゲージ理論(ローカルゲージ対称性)⑥

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$$

$$\psi \Rightarrow \psi' = \exp(i\theta(x^\nu))\psi$$

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi' = (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\exp(i\theta)\psi$$

$$\exp(i\theta)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$$

$$\psi \Rightarrow \psi' = \exp(i\theta)\psi$$

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi = 0 \quad i\gamma^\mu D_\mu \psi - m\psi = 0$$

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m)\exp(iq\chi(x^\nu))\psi$$

$$i\gamma^\mu D_\mu \exp(iq\chi(x^\nu))\psi - m\exp(iq\chi(x^\nu))\psi$$

$$\psi \Rightarrow \exp[iq\chi(x^\nu)]\psi$$

$$i\gamma^\mu D_\mu \exp[iq\chi(x^\nu)]\psi - m\exp[iq\chi(x^\nu)]\psi$$

$$i\gamma^\mu \exp[iq\chi(x^\nu)]D_\mu \psi - m\exp[iq\chi(x^\nu)]\psi$$

$$\exp[iq\chi(x^\nu)](i\gamma^\mu D_\mu \psi) - m\exp[iq\chi(x^\nu)]\psi$$

$$\exp[iq\chi(x^\nu)](i\gamma^\mu D_\mu \psi - m\psi)$$

$$\exp[iq\chi(x^\nu)](i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi$$

$$\exp[iq\chi(x^\nu)](i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi = 0$$

と置き換えられ、これをラグランジアンに代入すると

グローバル位相変換ではラグランジアンは不変である。
(四次元時空の全ての点で θ だけ共通に回転させる)