物理と対称性

令和２年１０月２７日

鹿児島現代物理勉強会
御領　悟志

対称性とは

- ある理論が力学変数に対して適当な変換を施しても不変であるとき
- ↓
    - その理論には対称性がある。
    - 物理の<u>最重要概念</u>

対称性の種類

大域的対称性

- 変換のパラメータが時空点によらない定数であるときの対称性。全時空間で「一斉に同じだけ」変換する。
- ①並進対称性　運動量保存
- ②時間対称性　エネルギー保存
- ③回転対称性　角運動量保存
- ④位相変換対称性　電気量保存
- （グローバルゲージ変換）

局所対称性

- 変換のパラメータが時空点の関数である時の対称性
- ⑤ゲージ対称性　ゲージ理論
-

一般化座標

一般化座標を $q(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_{3N})$とすると

x_i は $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_{3N}$ の関数。

$x_i = x_i(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_{3N}) \quad i = 1,2,3,\cdots, N$

x_i は q_iを通じて 時刻 t の関数になる。

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial t} = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j$$

偏微分 $\dfrac{\partial x_i}{\partial q_j}$ は q の関数なので $\dot{x}_i$は

qと$\dot{q}$の関数になる。

$$\dot{x}_i = \dot{x}_i(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_{3N}, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \ldots, \dot{q}_{3N})$$

運動エネルギーを表す と

$$T = \sum_{i=1}^{3N} \frac{m_i}{2} \left\{ \dot{x}_i(q, \dot{q}) \right\}^2$$

$$T = \sum_{i=1}^{3N} \frac{m_i}{2} \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \sum_{l=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_l} \dot{q}_l$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{3N} \sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial x_i}{\partial q_l} \dot{q}_k \dot{q}_l$$

$a_{kl} = \displaystyle\sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial x_i}{\partial q_l}$とおくと

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{3N} a_{kl}(q) \dot{q}_k \dot{q}_l$$

と表せられる。

最小作用の原理

$$S=\int_{t_0}^{t_1} L(q_i,\dot{q}_i)dt$$

$$\delta S=\int_{t_0}^{t_1} \delta L(q_i,\dot{q}_i)dt$$

$$\delta L=\sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i \cdots ①$$

$$\delta S=\int_{t_0}^{t_1}\sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i\right)dt$$

$\delta \dot{q}_i=\dfrac{d}{dt}(\delta q_i)$　より

$$\delta S=\int_{t_0}^{t_1}\sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}(\delta q_i)\right)dt\cdots ②$$

$$\delta S=\sum_i\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right]_{t_0}^{t_1}+\int_{t_0}^{t_1}\sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right]\delta q_i\right)dt\cdots ③$$

$\delta q_i(t_0)=\delta q_i(t_1)=0$　なので

$\delta S=\displaystyle\int_{t_0}^{t_1}\sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right]\right)\delta q_i dt=0$　ならば　$\cdots ④$

任意のδq_iにおいて最小が成り立つので

$\left(\dfrac{\partial L}{\partial q_i}-\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right]\right)=0\cdots ⑤$　オイラー・ラグランジュ方程式

保存量①

$L(q,\dot{q})$を時間微分する

$$\frac{dL}{dt}=\sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i+\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \cdots ①$$

オイラー・ラグランジュ方程式より

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \quad \cdots ②$$を①に代入すると

$$\frac{dL}{dt}=\sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i+\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \cdots ③$$

$$\frac{dL}{dt}=\sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right) \cdots ④$$

$$0=\frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i-L\right) \cdots ⑤$$

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i-L=const \quad \cdots ⑥$$

保存量②

$$L(q,\dot{q})=T(q,\dot{q})-U(q)$$

位置エネルギーが時間微分を含まないとする。

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N}\sum_{j=1}^{3N}a_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j\cdots ⑥$$

$a_{ij}(q)=a_{ji}(q)$　の対称性がある。

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}=\sum_{j=1}^{3N}a_{ij}(q)\dot{q}_j\cdots ⑦$$

$$\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i=\frac{\partial T(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\cdots ⑧$$

$$\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i=\sum_i\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i$$

$$\sum_i\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i=\sum_i^{3N}\sum_{j=1}^{3N}a_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j=2T\cdots ⑧$$

$$0=\frac{d}{dt}\left(2T-L\right)=\frac{d}{dt}\left(2T-(T-U)\right)$$

$$0=\frac{d}{dt}\left(T+U\right)\cdots ⑨$$

運動エネルギーと位置エネルギーの和が保存される。

$$T+U=E=const\cdots ⑩$$

一般化運動量・循環座標

運動エネルギー

$$T=\sum_{i=1}^{3N}\frac{m_i}{2}\left\{\dot{x}_i(q,\dot{q})\right\}^2$$

$$p_i=\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}=m_i\dot{x}_i\cdots①$$

ここで次のように一般化運動量を定義する

$$p_i=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\cdots②$$

$L=T(q,\dot{q})-U(q)$ならば

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{dp_i}{dt}=0$$

Lが$\dot{q}_i$のみの関数の場合

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$$

$$\therefore \frac{dp_i}{dt}=0$$

$$p_i=const$$

ここでq_iを循環座標という。

運動量保存則(並進対称性)

$$L = T(r_1, \cdots, r_N, r_1, \cdots, \dot{r}_N) - U(r_1, \cdots, r_N)$$

$$U(r_1, \cdots, r_N) = \sum_{i<j} U_{ij}(r_i - r_j)$$

各粒子を同じだけ$\vec{\varepsilon}$　並進移動させる。

それでもラグラジアンが変化せず保存されるとき

$$L(r_1 + \vec{\varepsilon}, \cdots, r_N + \vec{\varepsilon}, r_1, \cdots, \dot{r}_N) = L(r_1, \cdots, r_N, \dot{r}_1, \cdots, \dot{r}_N)$$

$$\vec{\varepsilon} = \varepsilon_x \vec{e}_x + \varepsilon_y \vec{e}_y + \varepsilon_z \vec{e}_z$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i}\vec{e}_x + \frac{\partial L}{\partial y_i}\vec{e}_y + \frac{\partial L}{\partial z_i}\vec{e}_z$$

$$\sum_i \vec{\varepsilon} \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0$$

$\vec{\varepsilon}$　がいかなる方向についても成り立つには

$$\sum_i \vec{\varepsilon} \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = \vec{\varepsilon} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0 \qquad \therefore \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0$$

$$\therefore \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\vec{e}_x + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i}\vec{e}_y + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i}\vec{e}_z \right) = const$$

$$\vec{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\vec{e}_x + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i}\vec{e}_y + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i}\vec{e}_z$$ なので

$$\vec{p} = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\vec{e}_x + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i}\vec{e}_y + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i}\vec{e}_z \right) = \sum_i \vec{p}_i = const$$

並進対称性があるときには、運動量保存則が
成り立つことを示す。

角運動量保存則(回転対称性)

$$L = T(r_1, \cdots, r_N, \dot{r}_1, \cdots, \dot{r}_N) - U(r_1, \cdots, r_N)$$

$$U(r_1, \cdots, r_N) = \sum_{i<j} U_{ij}(r_i - r_j)$$

各粒子を回転させる。

そのときラグランジアンが変化せず保存される場合

$$L(\vec{r}_1 + \delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_1, \cdots, \vec{r}_N + \delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_N, \vec{\upsilon}_1 + \delta\vec{\varphi} \times \vec{\upsilon}_1, \cdots, \vec{\upsilon}_N + \delta\vec{\varphi} \times \vec{\upsilon}_N)$$

$$= L(\vec{r}_1, \cdots, \vec{r}_N, \vec{\upsilon}_1, \cdots, \vec{\upsilon}_N + \delta\vec{\varphi} \times \vec{\upsilon}_N)$$

$$\delta\vec{\varphi} = \delta\varphi_x \vec{e}_x + \delta\varphi_y \vec{e}_y + \delta\varphi_z \vec{e}_z$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i}\vec{e}_x + \frac{\partial L}{\partial y_i}\vec{e}_y + \frac{\partial L}{\partial z_i}\vec{e}_z \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = \frac{\partial L}{\partial \vec{\upsilon}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\vec{e}_x + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i}\vec{e}_y + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i}\vec{e}_z$$

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \cdot \left(\delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_i\right) + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{\nu}_i} \cdot \left(\delta\vec{\varphi} \times \vec{\upsilon}_i\right) = 0$$

$$\sum_i \delta\vec{\varphi}\left(\vec{r}_i \times \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i}\right) + \sum_i \delta\vec{\varphi}\left(\vec{\upsilon}_i \times \frac{\partial L}{\partial \vec{\upsilon}_i}\right) = 0$$

$$\delta\vec{\varphi}\sum_i \left(\vec{r}_i \times \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} + \vec{\nu}_i \times \frac{\partial L}{\partial \vec{\upsilon}_i}\right) = 0$$

$$\delta\vec{\varphi}\sum_i \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_i \times \frac{\partial L}{\partial \vec{\upsilon}_i}\right) = 0$$

$$\sum_i \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_i \times \frac{\partial L}{\partial \vec{\upsilon}_i}\right) = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_i \times \vec{p}_i\right) = 0$$

$$\vec{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\vec{e}_x + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i}\vec{e}_y + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i}\vec{e}_z$$

$$\sum_i \left(\vec{r}_i \times \vec{p}_i\right) = const$$

回転対称性があるときには、角運動量保存則が成り立つことを示す。

エネルギー保存則（時間対称性）

$t \to t + \delta t$ と微少時間が経過したときでも

ラグラジアンが変化せ ず保存されるとき

$$L(r_1,\cdots,r_N,r_1,\cdots,\dot{r}_N,t) = L(r_1,\cdots,r_N,\dot{r}_1,\cdots,\dot{r}_N,t+\delta t)$$

$L(q,\dot{q},t)$を時間微分する

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \cdots ①$$

オイラー・ラグランジュ方程式より

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \cdots ②$$

②を①に代入 すると

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \cdots ③$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right) \cdots ④$$

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L\right) \cdots ⑤$$

時間の微小変化δt後にLが変化しないので

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \cdots ⑥$$

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L\right) = 0 \cdots ⑦$$

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L = const \cdots ⑧$$

保存量②でのべた通り

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L = T + U = E(\text{一定})$$

エネルギー保存則が導かれる。

電気量保存則(大域的ゲージ対称性)①

自由電子の　Lagrangian $\mathcal{L}$　は

$$\mathcal{L}=\overline{\psi}\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m\right)\psi \qquad \psi \Rightarrow \psi\exp(ig\theta)$$

$\psi \to \psi+\delta\psi \quad \delta\psi = ig\theta\psi$　のとき

$$\delta\mathcal{L}=0$$

$$\delta\mathcal{L}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}\delta\psi+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\psi)}\delta(\partial_{\mu}\psi)+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\overline{\psi}}\delta\overline{\psi}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\overline{\psi})}\delta(\partial_{\mu}\overline{\psi})=0$$

$\delta\mathcal{L}$には$\partial_{\mu}\overline{\psi}$の項がないので$\overline{\psi}$の項は寄与しない。

オイラーラグランジュ方程式から

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}=\partial_{\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\psi)}\right)$$

$\partial_{\mu}(\delta\psi)=\delta(\partial_{\mu}\psi)$なので

$$\delta\mathcal{L}=\partial_{\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\psi)}\right)\delta\psi+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\psi)}\partial_{\mu}(\delta\psi)=\partial_{\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\psi)}\delta\psi\right)=0$$

$$\delta\mathcal{L}=\partial_{\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\psi)}ig\theta\psi\right)=ig\theta\partial_{\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\psi)}\psi\right)=0$$

$\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\psi)}=i\overline{\psi}\gamma^{\mu}$なので

$$\delta\mathcal{L}=ig\theta\partial_{\mu}\left(i\overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi\right)=i\theta\partial_{\mu}\left(ig\overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi\right)=0$$

$j^{\mu}=g\overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi$とおけば

$$i\theta\partial_{\mu}\left(i(j^{\mu})\right)=0 \qquad \Rightarrow \qquad -\theta\partial_{\mu}j^{\mu}=0$$

$$\therefore \quad \partial_{\mu}j^{\mu}=0$$

4元カレント密度を　j^{μ}　とおくと　$j^{\mu}=(\rho,\vec{j})$

$$\partial_{\mu}j^{\mu}=\partial_{0}\rho+\partial_{1}j^{1}+\partial_{2}j^{2}+\partial_{3}j^{3}=\frac{\partial}{\partial t}\rho+\frac{\partial}{\partial x}j^{1}+\frac{\partial}{\partial y}j^{2}+\frac{\partial}{\partial z}j^{3}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho+\frac{\partial}{\partial x}j^{1}+\frac{\partial}{\partial y}j^{2}+\frac{\partial}{\partial z}j^{3}=\frac{\partial}{\partial t}\rho+\vec{\nabla}\cdot\vec{j}=0$$

電気量保存則(大域的ゲージ対称性)②

$$\int\left(\frac{\partial}{\partial t}\rho+\frac{\partial}{\partial x}j^1+\frac{\partial}{\partial y}j^2+\frac{\partial}{\partial z}j^3\right)dtdxdydz$$

$$=\int\left(\frac{\partial}{\partial t}\rho+\overrightarrow{\nabla}\cdot\vec{j}\right)dtdxdydz=0$$

$$=\int\frac{\partial}{\partial t}\rho dtdxdydz+dt\int\overrightarrow{\nabla}\cdot\vec{j}dxdydz=0$$

無限遠においては

$$\vec{j}=0$$

$$\int\rho dxdydz+dt\int\vec{j}\overrightarrow{ds}=0$$

$$dQ+dt\cdot 0=0$$

$$\frac{dQ}{dt}=0$$

$$\therefore Q=const$$

Qはバリオン数(レプトン数)を示す。
(結論)　大域的ゲージ不変なら電気量が保存される。
電気量保存則はゲージ対称性から導かれる。

ネーターの定理

- 微少座標変換のときラグラジアンが保存され、力学変数の変化がオイラー・ラグランジュの方程式に従うものとする。

$$L(q,\dot{q})$$

$$\delta L=\sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i \cdots ①$$

$$\delta \dot{q}_i=\frac{d}{dt}(\delta q_i)$$ より

$$\delta L=\sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}(\delta q_i) \cdots ②$$

$$\delta L=\sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{d}{dt}\sum_i\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right]-\frac{d}{dt}\sum_i\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right]\delta q_i \cdots ③$$

$$\delta L=\sum\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right]\right)\delta q_i+\frac{d}{dt}\sum\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right] \cdots ④$$

無限小変換においてラグラジアンが保存される。 $\delta L=0$ のとき

$$\frac{d}{dt}\sum\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right]=0 \quad \cdots ⑤ \qquad \therefore \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i=const \quad \cdots ⑥$$

$q_i \to q_i+\varepsilon S_i(q)$ とおけるとき

すなわち $\delta q_i=\varepsilon S_i(q)$ と書ければ⑤式は

$$\frac{d}{dt}\sum\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right]=\frac{d}{dt}\sum\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\varepsilon S_i(q)\right]=\varepsilon\frac{d}{dt}\sum\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}S_i(q)\right]=0$$

$$\sum_i\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}S_i(q)\right]=const \cdots ⑦$$

上記のような保存量が導ける。

ゲージ理論（ローカルゲージ対称性）①

電磁場の存在しない自由空間における電子のラグラジアンは

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$$

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$$

$$\bar{\psi} = \begin{bmatrix}\psi_1^* & \psi_2^* & \psi_3^* & \psi_4^*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\psi_1^* & \psi_2^* & -\psi_3^* & -\psi_4^*\end{bmatrix}$$

$\psi \Rightarrow \exp(i\theta)\psi$ 　とするとここでは θは定数となる

$$\mathcal{L} = i\exp(-i\theta)\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\exp(i\theta)\psi - m\exp(-i\theta)\bar{\psi}\exp(i\theta)\psi$$

$$= i\exp(-i\theta)\exp(i\theta)\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\exp(-i\theta)\exp(i\theta)\bar{\psi}\psi$$

$$= i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$$

グローバル位相変換ではラグラジアンは不変である。

（四次元時空の全ての点で　θ　だけ共通に回転させる）

スピノル場の位相　θ　が定数でなく x_νの実関数として$\theta = \theta(x_\nu)$であるときについて

$\psi \Rightarrow \exp(i\theta(x_\nu))\psi$ 　位相を時空間各点で独立に回転させる。

$$\mathcal{L} = i\exp[-i\theta(x_\nu)]\bar{\psi}\gamma^\mu\exp[i\theta(x_\nu)]\partial_\mu\psi$$

$$-m\exp[-i\theta(x_\nu)]\bar{\psi}\exp[i\theta(x_\nu)]\psi$$

$$+i\exp[-i\theta(x_\nu)]\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu i\theta(x_\nu))\exp[i\theta(x_\nu)]\psi$$

$$= i\exp[-i\theta(x_\nu)]\bar{\psi}\gamma^\mu\exp[i\theta(x_\nu)]\partial_\mu\psi$$

$$-m\exp[-i\theta(x_\nu)]\bar{\psi}\exp[i\theta(x_\nu)]\psi$$

$$+ii\exp[-i\theta(x_\nu)]\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\theta(x_\nu))\exp[i\theta(x_\nu)]\psi$$

$$= i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - (\partial_\mu\theta(x_\nu))\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

$$\mathcal{L} \Rightarrow \mathcal{L} - (\partial_\mu\theta(x_\nu))\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

ラグラジアンは不変ではない。

ゲージ理論(ローカルゲージ対称性)②

ラグラジアンが、逆にローカルゲージ変換で不変であり
ローカルゲージ変換を基本原理に置く。

ゲージ場　$A(x^{\nu})$　を導入して微分を変更する。

$\partial_{\mu} \Rightarrow D_{\mu} = \partial_{\mu} + iqA_{\mu}$　　共変微分　と呼ぶ。

ゲージ場を、ローカルゲージ変換で次のように変換する。

$$A_{\mu} \Rightarrow A_{\mu} - \frac{1}{q}\partial_{\mu}\theta(x^{\nu})$$

$\theta = \theta(x_{\nu})$　は任意の実関数なので、電子の電荷の大きさに
比例するものと定義しなおす。

$\theta(x_{\nu}) = qA(x_{\nu})$

すると、ゲージ場は

$$A_{\mu} \Rightarrow A_{\mu} - \frac{1}{q}\partial_{\mu}qA(x^{\nu}) = A_{\mu} - \partial_{\mu}A(x^{\nu})$$

と変換される。

$$\psi \Rightarrow \exp[iqA(x^{\nu})]\psi$$

$$\begin{aligned}
D_{\mu}\psi &\Rightarrow \left[\partial_{\mu} + iq\left(A_{\mu} - \partial_{\mu}A(x^{\nu})\right)\right]\exp[iqA(x^{\nu})]\psi \\
&= \partial_{\mu}\exp[iqA(x^{\nu})]\psi + iq\left(A_{\mu} - \partial_{\mu}A(x^{\nu})\right)\exp[iqA(x^{\nu})]\psi \\
&= iq\partial_{\mu}A(x^{\nu})\exp[iqA(x^{\nu})]\psi + \exp[iqA(x^{\nu})]\partial_{\mu}\psi \\
&\qquad + iq\left(A_{\mu} - \partial_{\mu}A(x^{\nu})\right)\exp[iqA(x^{\nu})]\psi \\
&= \exp[iqA(x^{\nu})]\partial_{\mu}\psi + iqA_{\mu}\exp[iqA(x^{\nu})]\psi \\
&= \exp[iqA(x^{\nu})]\left(\partial_{\mu} + iqA_{\mu}\right)\psi \\
&= \exp[iqA(x^{\nu})]D_{\mu}\psi
\end{aligned}$$

$$D_{\mu}\left(\exp[iqA(x^{\nu})]\psi\right) = \exp[iqA(x^{\nu})]D_{\mu}\psi$$

ゲージ理論（ローカルゲージ対称性）③

$$\mathcal{L} = i\exp[-iqA(x^{\nu})]\overline{\psi}\gamma^{\mu}D_{\mu}\exp[iqA(x^{\nu})]\psi$$

$$-m\exp[-iqA(x^{\nu})]\overline{\psi}\exp[iqA(x^{\nu})]\psi$$

$$= i\exp[-iqA(x^{\nu})]\overline{\psi}\gamma^{\mu}\exp[iqA(x^{\nu})]D_{\mu}\psi$$

$$-m\exp[-iqA(x^{\nu})]\overline{\psi}\exp[iqA(x^{\nu})]\psi$$

$$= i\overline{\psi}\gamma^{\mu}D_{\mu}\psi - m\overline{\psi}\psi$$

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}\left(i\gamma^{\mu}D_{\mu} - m\right)\psi$$

ラグラジアンがゲージ場の下で共変微分により不変である

ことが示される。

ラグラジアン（ローカルゲージ対称性）

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}\left(i\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} + iqA_{\mu}) - m\right)\psi$$

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\psi - \left(q\overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi\right)A_{\mu}$$

$\overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi \quad \rightarrow$ ディラック波の確率密度の流れの式

$$A^{\mu} = \begin{bmatrix}\phi & A_x & A_y & A_z\end{bmatrix}$$

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^{\nu}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\nu}} = \partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu}$$

$$F^{0i} = \partial^{0}A^{i} - \partial^{i}A^{0} = \frac{\partial A^{i}}{\partial x_{0}} - \frac{\partial A^{0}}{\partial x_{i}} = \frac{\partial A^{i}}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x_{i}}$$

$$F^{01} = \partial^{0}A^{1} - \partial^{1}A^{0} = \frac{\partial A^{1}}{\partial x_{0}} - \frac{\partial A^{0}}{\partial x_{1}} = \frac{\partial A_{x}}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} = -E_{x}$$

$$\vec{F}^{0i} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla\phi$$

ハミルトニアン(1)

ハミルトニアンについて

$$H=\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L(q_i,\dot{q}_i,t) \quad \cdots ①$$

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

$$H=\sum_i p_i\dot{q}_i - L(q_i,\dot{q}_i,t) \quad \cdots ②$$

ハミルトニアンの全微分をとると

$$dH=\sum_i\left(\dot{q}_i\,dp_i+p_i d\dot{q}_i-\frac{\partial L(q_i,\dot{q}_i,t)}{\partial q_i}dq_i-\frac{\partial L(q_i,\dot{q}_i,t)}{\partial \dot{q}_i}d\dot{q}_i\right)-\frac{\partial L(q_i,\dot{q}_i,t)}{\partial t}dt$$

$$dH=\sum_i\left(\dot{q}_i\,dp_i+p_i d\dot{q}_i-\frac{\partial L(q_i,\dot{q}_i,t)}{\partial q_i}dq_i-p_i d\dot{q}_i\right)-\frac{\partial L(q_i,\dot{q}_i,t)}{\partial t}dt$$

$$dH=\sum_i\left(\dot{q}_i\,dp_i-\frac{\partial L(q_i,\dot{q}_i,t)}{\partial q_i}dq_i\right)-\frac{\partial L(q_i,\dot{q}_i,t)}{\partial t}dt \quad \cdots ③$$

オイラー・ラグランジュ方程式より

$$\frac{\partial L(q_i,\dot{q}_i,t)}{\partial q_i}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(q_i,\dot{q}_i,t)}{\partial \dot{q}_i}\right)=\frac{dp_i}{dt} \quad \cdots ④$$

④を③式に代入する

ハミルトニアン(2)

$$dH = \sum_i \left(\dot{q}_i \, dp_i - \frac{dp_i}{dt} dq_i \right) - \frac{\partial L(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial t} dt \quad \cdots ⑤$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{dp_i}{dt} \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\left[\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \right]$$

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \left(\dot{q}_i \frac{dp_i}{dt} - \frac{dp_i}{dt} \frac{dq_i}{dt} \right) - \frac{\partial L(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial t}$$

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \left(\dot{q}_i \frac{dp_i}{dt} - \frac{dp_i}{dt} \dot{q}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \quad \cdots ⑥$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad \cdots ⑦$$

Hが、あらわに時間に依存しない関数の時Hは一定で保存される。