ベクトル解析と電磁気学

Vector calculus and Electromagnetics

2022.10.30

鹿児島現代物理勉強会

御領　悟志

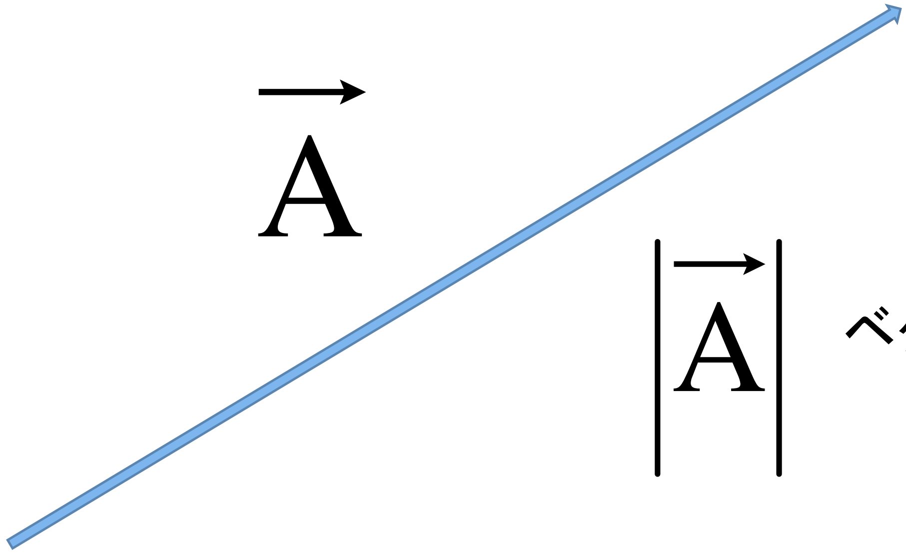
ベクトル解析とは

- ベクトルを微分・積分したり、ベクトルの内積や外積などの演算を施したりして、現象を定量的に分析・解析するときに強力なツールとなる。
- 電界・磁界などベクトルを用いて表現する物理量の時間・空間的に変化する現象を取り扱うのに最も適した数学である。
- 大学・学部の２年生あたりで学習する。

ベクトル(Vector)

力のように大きさと向きをもち矢印で表せる量をベクトルという。

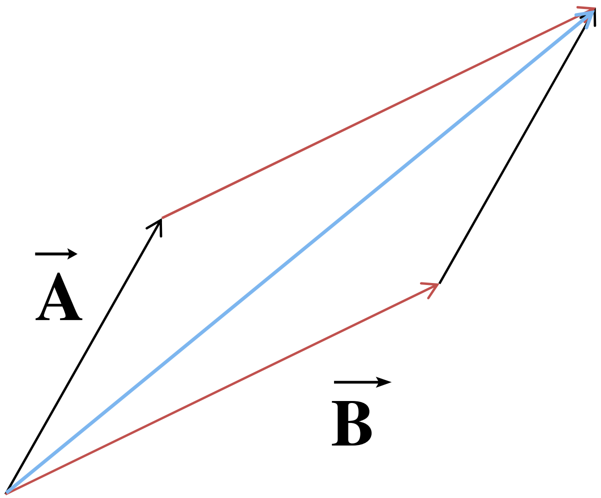
$$\vec{A}$$



$$|\vec{A}|$$ ベクトルの大きさ

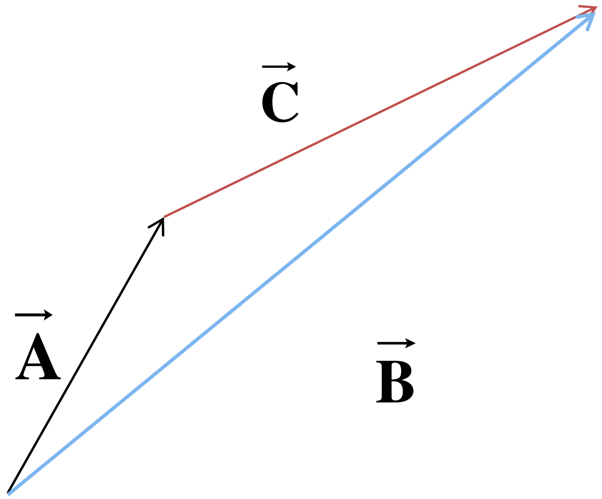
ベクトルの和と差

$$\vec{\mathbf{A}}+\vec{\mathbf{B}}=\vec{\mathbf{B}}+\vec{\mathbf{A}}$$



二つのベクトルを隣り合う2辺と平行四辺形を描きその対角線がベクトルの和を表す。

$$\vec{\mathbf{C}}=\vec{\mathbf{B}}-\vec{\mathbf{A}}$$

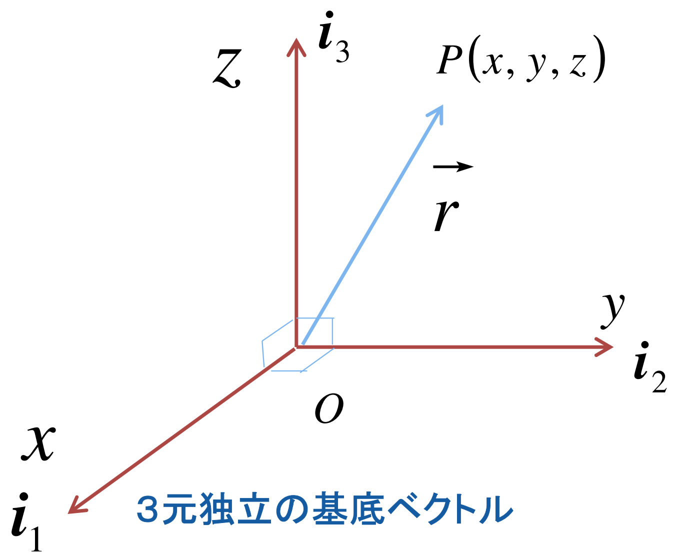


ベクトルAにベクトルCを加えてベクトルBになるとき、ベクトルCをベクトルAとBの差という。

位置ベクトル

空間の一点Pは、原点Oからの距離と向きにより定まる。
この空間の一点を定める大きさと向きを持つベクトル量を
位置ベクトルという。

位置ベクトル　$\vec{r} = \overrightarrow{OP}$



3元独立の基底ベクトルを用いて位置ベクトルを表すと次のようになる。

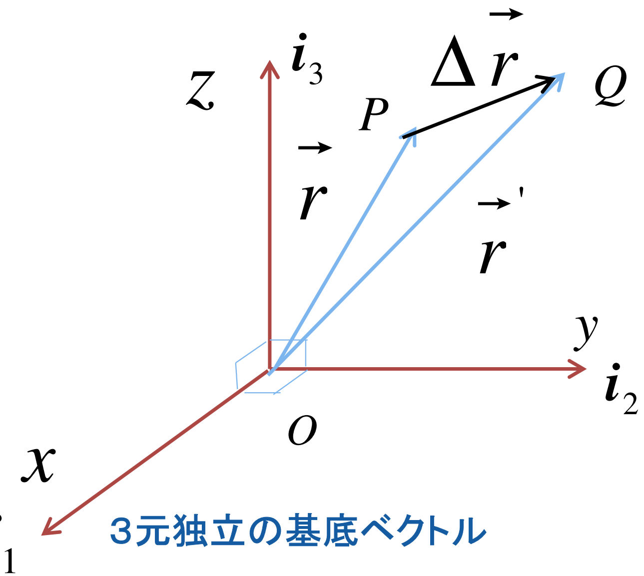
$$\vec{r} = x\boldsymbol{i}_1 + y\boldsymbol{i}_2 + z\boldsymbol{i}_3 \quad \cdots①$$

このようにx、y、zの3つの数の組み合わせで、空間の1点Pが定まる。この組み合わせを空間座標といい、次のように表す。

$$P(x, y, z)$$

変位ベクトル

空間の点Pから点Qまで位置ベクトルが変化したとする。
このこの位置の変化を変位といい、点Pから点Qまで引いた矢印のことを変位ベクトルという。変位ベクトルは、位置ベクトルの差で表せる。



点Pの位置ベクトル $\vec{r}$　　点Qの位置ベクトル $\vec{r}\,'$

$P\left(x, y, z\right)$　　$Q\left(x', y', z'\right)$

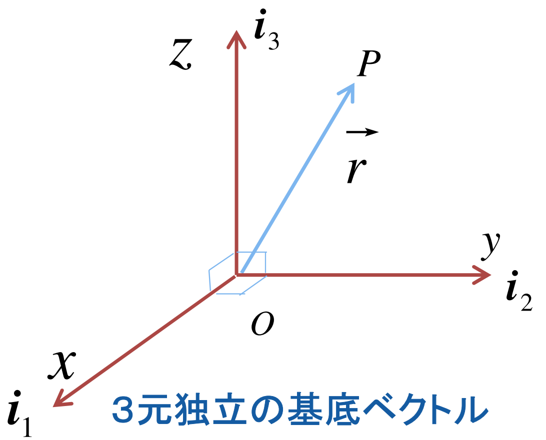
点Pから点Qへの変位ベクトル $\Delta\vec{r} = \vec{r}\,' - \vec{r}$ ‥②

$$\Delta\vec{r} = (x' - x)\boldsymbol{i}_1 + (y' - y)\boldsymbol{i}_2 + (z' - z)\boldsymbol{i}_3 \quad ‥③$$

3元独立の基底ベクトルを用いて③の変位ベクトルを表すと次のようになる。

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\boldsymbol{i}_1 + \Delta y\boldsymbol{i}_2 + \Delta z\boldsymbol{i}_3 \quad ‥④$$

速度・加速度ベクトル



位置ベクトルの時間微分をするとき、基底ベクトルは時間的に変化しないものとすると

$$\frac{d\boldsymbol{i}_1}{dt}=\boldsymbol{0} \qquad \frac{d\boldsymbol{i}_2}{dt}=\boldsymbol{0} \qquad \frac{d\boldsymbol{i}_3}{dt}=\boldsymbol{0} \qquad \cdot\cdot④$$

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\boldsymbol{i}_1+\frac{dy}{dt}\boldsymbol{i}_2+\frac{dz}{dt}\boldsymbol{i}_3+x\frac{d\boldsymbol{i}_1}{dt}+y\frac{d\boldsymbol{i}_2}{dt}+z\frac{d\boldsymbol{i}_3}{dt}$$

単位時間あたりの位置の変化を表す量を、速度ベクトルという。

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\boldsymbol{i}_1+\frac{dy}{dt}\boldsymbol{i}_2+\frac{dz}{dt}\boldsymbol{i}_3 \qquad \cdot\cdot⑤$$

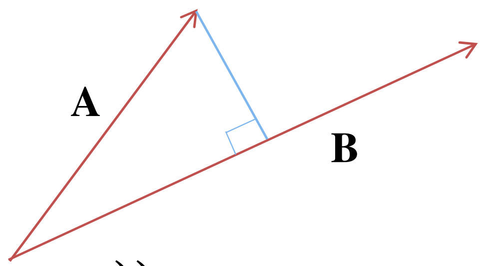
もう一度時間微分すると加速度ベクトルになる

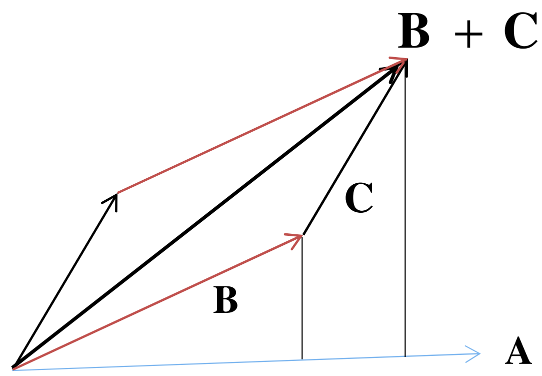
$$\vec{a}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\frac{d^2x}{dt^2}\boldsymbol{i}_1+\frac{d^2y}{dt^2}\boldsymbol{i}_2+\frac{d^2z}{dt^2}\boldsymbol{i}_3 \qquad \cdots⑥$$

ベクトルの内積

ベクトルの演算 ～ 演算後の量はスカラーに正負の符号をつけた値になる

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{i}_1 + A_2\mathbf{i}_2 + A_3\mathbf{i}_3$$
$$\mathbf{B} = B_1\mathbf{i}_1 + B_2\mathbf{i}_2 + B_3\mathbf{i}_3$$

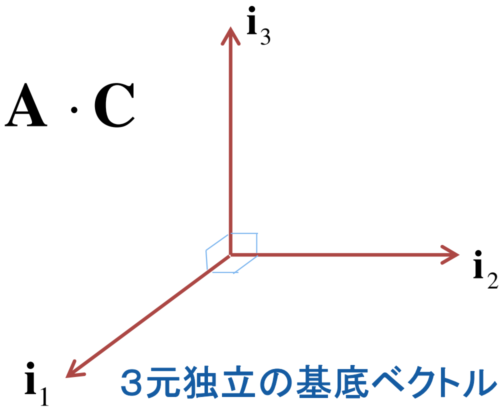




$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$$

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = |\mathbf{A}||\mathbf{B}+\mathbf{C}|\cos(\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}))$$
$$= |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) + |\mathbf{A}||\mathbf{C}|\cos(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$$

$$\mathbf{i}_i\cdot\mathbf{i}_j = 0 \quad (i \neq j)$$
$$\mathbf{i}_i\cdot\mathbf{i}_j = 1 \quad (i = j)$$



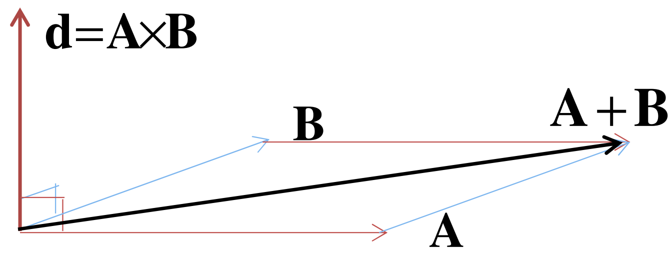
$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = (A_1\mathbf{i}_1 + A_2\mathbf{i}_2 + A_3\mathbf{i}_3)(B_1\mathbf{i}_1 + B_2\mathbf{i}_2 + B_3\mathbf{i}_3)$$
$$= A_1B_1\mathbf{i}_1\mathbf{i}_1 + A_1B_2\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2 + A_1B_3\mathbf{i}_1\mathbf{i}_3 + A_2B_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_1 + A_2B_2\mathbf{i}_2\mathbf{i}_2 + A_2B_3\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3 + A_3B_1\mathbf{i}_3\mathbf{i}_1 + A_3B_2\mathbf{i}_3\mathbf{i}_2 + A_3B_3\mathbf{i}_3\mathbf{i}_3$$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$$

ベクトルの外積（１）

$$\left|\mathbf{A}\times\mathbf{B}\right| = \left|\mathbf{A}\right|\left|\mathbf{B}\right|\sin\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\right)$$ 演算後の量もベクトルである

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \left|\mathbf{A}\right|\left|\mathbf{B}\right|\sin\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\right)\frac{\mathbf{d}}{\left|\mathbf{d}\right|}$$ $\mathbf{d}$ は$\mathbf{A}$と$\mathbf{B}$　両方に垂直



dの向きはAからBに右ねじを回したとき、右ねじが進行する向き

$$\mathbf{A}\times\left(\mathbf{B}+\mathbf{C}\right) = \left|\mathbf{A}\right|\left|\mathbf{B}\right|\sin\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\right)\mathbf{d}_1 + \left|\mathbf{A}\right|\left|\mathbf{C}\right|\sin\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}\right)\mathbf{d}_2 = \mathbf{A}\times\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\mathbf{C}$$

$$\mathbf{i}_1\times\mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_3 \quad \mathbf{i}_2\times\mathbf{i}_3 = \mathbf{i}_1 \quad \mathbf{i}_3\times\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2 \quad \mathbf{i}_2\times\mathbf{i}_1 = -\mathbf{i}_3 \quad \mathbf{i}_3\times\mathbf{i}_2 = -\mathbf{i}_1 \quad \mathbf{i}_1\times\mathbf{i}_3 = -\mathbf{i}_2$$

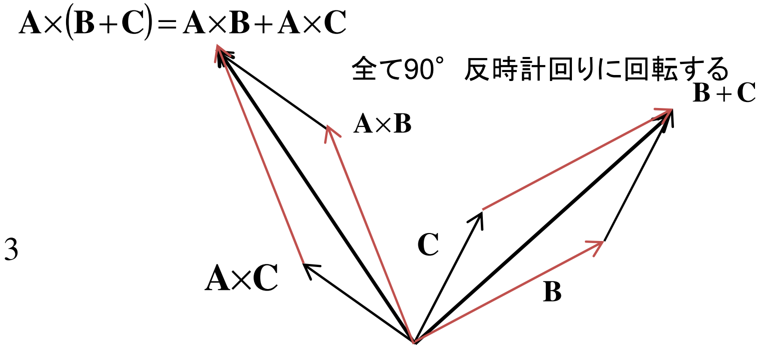
$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \left(A_1\mathbf{i}_1 + A_2\mathbf{i}_2 + A_3\mathbf{i}_3\right)\times\left(B_1\mathbf{i}_1 + B_2\mathbf{i}_2 + B_3\mathbf{i}_3\right)$$

$$= A_1B_1\mathbf{i}_1\times\mathbf{i}_1 + A_1B_2\mathbf{i}_1\times\mathbf{i}_2 + A_1B_3\mathbf{i}_1\times\mathbf{i}_3 + A_2B_1\mathbf{i}_2\times\mathbf{i}_1 + A_2B_2\mathbf{i}_2\times\mathbf{i}_2 + A_2B_3\mathbf{i}_2\times\mathbf{i}_3 + A_3B_1\mathbf{i}_3\times\mathbf{i}_1 + A_3B_2\mathbf{i}_3\times\mathbf{i}_2 + A_3B_3\mathbf{i}_3\times\mathbf{i}_3$$

$$= A_1B_2\mathbf{i}_1\times\mathbf{i}_2 + A_1B_3\mathbf{i}_1\times\mathbf{i}_3 + A_2B_1\mathbf{i}_2\times\mathbf{i}_1 + A_2B_3\mathbf{i}_2\times\mathbf{i}_3 + A_3B_1\mathbf{i}_3\times\mathbf{i}_1 + A_3B_2\mathbf{i}_3\times\mathbf{i}_2$$

$$= A_1B_2\mathbf{i}_3 + A_1B_3(-\mathbf{i}_2) + A_2B_1(-\mathbf{i}_3) + A_2B_3\mathbf{i}_1 + A_3B_1\mathbf{i}_2 + A_3B_2(-\mathbf{i}_1)$$

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \left(A_2B_3 - A_3B_2\right)\mathbf{i}_1 + \left(A_3B_1 - A_1B_3\right)\mathbf{i}_2 + \left(A_1B_2 - A_2B_1\right)\mathbf{i}_3$$



$\mathbf{A}$　は $\mathbf{B}+\mathbf{C}$ の平面に垂直とする

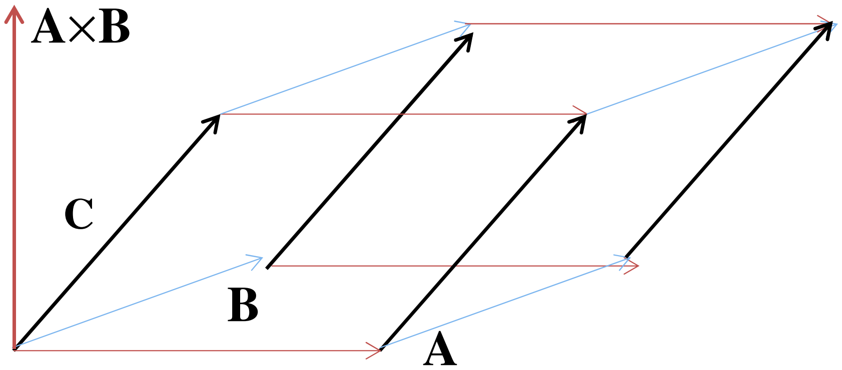
ベクトルの外積(２)

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=(A_2B_3-A_3B_2)\mathbf{i}_1+(A_3B_1-A_1B_3)\mathbf{i}_2+(A_1B_2-A_2B_1)\mathbf{i}_3$$

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix}A_2 & A_3\\ B_2 & B_3\end{vmatrix}\mathbf{i}_1+\begin{vmatrix}A_3 & A_1\\ B_3 & B_1\end{vmatrix}\mathbf{i}_2+\begin{vmatrix}A_1 & A_2\\ B_1 & B_2\end{vmatrix}\mathbf{i}_3$$

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3\\ A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix}$$

外積が、行列式を用いて表せる。



ベクトルの三重積～　平行六面体の体積を求めることに等しい

$$\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=(C_1\mathbf{i}_1+C_2\mathbf{i}_2+C_3\mathbf{i}_3)\cdot\begin{vmatrix}\mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3\\ A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix}=C_1\begin{vmatrix}A_2 & A_3\\ B_2 & B_3\end{vmatrix}-C_2\begin{vmatrix}A_1 & A_3\\ B_1 & B_3\end{vmatrix}+C_3\begin{vmatrix}A_1 & A_2\\ B_1 & B_2\end{vmatrix}$$

$$\mathrm{C}\cdot(\mathrm{A}\times\mathrm{B})=\begin{vmatrix}C_1 & C_2 & C_3\\ A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\begin{vmatrix}A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\\ C_1 & C_2 & C_3\end{vmatrix}$$

ベクトルの微分(1)

ベクトルについての時間変化率について考察する

$m\vec{A}$ の時間微分について考える

ここでmは実数とする。

$$d(m\vec{A})=(m+dm)(\vec{A}+d\vec{A})-m\vec{A}$$
$$=m\vec{A}+md\vec{A}+dm\vec{A}+dmd\vec{A}-m\vec{A}$$
$$=md\vec{A}+dm\vec{A}+dmd\vec{A}$$
$$\frac{d(m\vec{A})}{dt}=m\frac{d\vec{A}}{dt}+\frac{dm}{dt}\vec{A}+\frac{dm}{dt}d\vec{A}$$

$dm\to 0$ $d\vec{A}\to 0$ $dt\to 0$ なので

$$\frac{d(m\vec{A})}{dt}=m\frac{d\vec{A}}{dt}+\frac{dm}{dt}\vec{A} \quad \cdots①$$

$\vec{A}+\vec{B}$ の時間微分について考える

$$d(\vec{A}+\vec{B})=(\vec{A}+d\vec{A})+(\vec{B}+d\vec{B})-(\vec{A}+\vec{B})$$
$$=d\vec{A}+d\vec{B}$$

$d\vec{A}\to 0$ $d\vec{B}\to 0$ $dt\to 0$ なので

$$\frac{d(\vec{A}+\vec{B})}{dt}=\frac{d\vec{A}}{dt}+\frac{d\vec{B}}{dt}$$

ベクトルの微分（2）

$\vec{A}\cdot\vec{B}$ の時間微分について考える

$$d(\vec{A}\cdot\vec{B})=(\vec{A}+d\vec{A})(\vec{B}+d\vec{B})-\vec{A}\cdot\vec{B}$$

$$=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot d\vec{B}+d\vec{A}\cdot\vec{B}+d\vec{A}\cdot d\vec{B}-\vec{A}\cdot\vec{B}$$

$$=\vec{A}\cdot d\vec{B}+d\vec{A}\cdot\vec{B}+d\vec{A}\cdot d\vec{B}$$

$$\frac{d(\vec{A}\cdot\vec{B})}{dt}=\vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{dt}+\frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{B}+\frac{d\vec{A}}{dt}\cdot d\vec{B}$$

$d\vec{A}\to 0$　$d\vec{B}\to 0$　$dt\to 0$　なので

$$\frac{d(\vec{A}\cdot\vec{B})}{dt}=\vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{dt}+\frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{B}\quad\cdots②$$

$\vec{A}\times\vec{B}$ の時間微分について考える

$$d(\vec{A}\times\vec{B})=(\vec{A}+d\vec{A})\times(\vec{B}+d\vec{B})-\vec{A}\times\vec{B}$$

$$=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times d\vec{B}+d\vec{A}\times\vec{B}+d\vec{A}\times d\vec{B}-\vec{A}\times\vec{B}$$

$$=\vec{A}\times d\vec{B}+d\vec{A}\times\vec{B}+d\vec{A}\times d\vec{B}$$

$$\frac{d(\vec{A}\times\vec{B})}{dt}=\vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt}+\frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B}+\frac{d\vec{A}}{dt}\times d\vec{B}$$

$d\vec{A}\to 0$　$d\vec{B}\to 0$　$dt\to 0$　なので

$$\frac{d(\vec{A}\times\vec{B})}{dt}=\vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt}+\frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B}\quad\cdots③$$

ベクトル解析の公式(１)

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$$

$$\left[\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})\right]_x=\left[A_y(\vec{B}\times\vec{C})_z-A_z(\vec{B}\times\vec{C})_y\right]=\left[A_y(B_xC_y-B_yC_x)-A_z(B_zC_x-B_xC_z)\right]$$

$$=\left[A_yB_xC_y-A_yB_yC_x-A_zB_zC_x+A_zB_xC_z\right]$$

$$=\left[A_xB_xC_x+A_yB_xC_y+A_zB_xC_z-A_xB_xC_x-A_yB_yC_x-A_zB_zC_x\right]$$

$$=\left[B_x\left(C_xA_x+C_yA_y+C_zA_z\right)-C_x\left(A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z\right)\right]$$

$$=\left[B_x\left(\vec{C}\cdot\vec{A}\right)-C_x\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\right]\quad\cdots①$$

y、z成分も同様にして

$$\left[\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})\right]_y=\left[B_y\left(\vec{C}\cdot\vec{A}\right)-C_y\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\right]\quad\cdots②\qquad\left[\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})\right]_z=\left[B_z\left(\vec{C}\cdot\vec{A}\right)-C_z\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\right]\quad\cdots③$$

∴　①②③をまとめると　$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\left(\vec{C}\cdot\vec{A}\right)\vec{B}-\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C}\quad\cdots④$

ベクトル解析の公式(2) 発散・回転渦の定義

$$\vec{\mathrm{A}} = A_x \vec{e_x} + A_y \vec{e_y} + A_z \vec{e_z}$$ と一般的なベクトルを定義する。

$$\mathrm{div}\,\vec{\mathrm{A}} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\vec{\mathrm{A}}\right)_x + \frac{\partial}{\partial y}\left(\vec{\mathrm{A}}\right)_y + \frac{\partial}{\partial z}\left(\vec{\mathrm{A}}\right)_z$$

ベクトルの発散　ダイバージェンス

$$\mathrm{div}\vec{\mathrm{A}} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad \cdot\cdot①$$

ベクトルの渦　ローテーション

$$\mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{A}} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e_y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e_z} \quad \cdot\cdot②$$

ベクトル解析の公式(3) 発散・回転渦の定義

$$\overrightarrow{\mathrm{A}} = A_x \overrightarrow{e_x} + A_y \overrightarrow{e_y} + A_z \overrightarrow{e_z} \qquad \overrightarrow{\mathrm{B}} = B_x \overrightarrow{e_x} + B_y \overrightarrow{e_y} + B_z \overrightarrow{e_z}$$

と一般的なベクトルを定義する。

$$\overrightarrow{\mathrm{A}} \times \overrightarrow{\mathrm{B}} = \left(A_y B_z - A_z B_y\right)\overrightarrow{e_x} + \left(A_z B_x - A_x B_z\right)\overrightarrow{e_y} + \left(A_x B_y - A_y B_x\right)\overrightarrow{e_z}$$

$$\mathrm{div}\, \overrightarrow{\mathrm{A}} \times \overrightarrow{\mathrm{B}} = \frac{\partial}{\partial x}\left(A_y B_z - A_z B_y\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(A_z B_x - A_x B_z\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(A_x B_y - A_y B_x\right) \quad \cdot\cdot①$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(A_y B_z - A_z B_y\right) = \frac{\partial A_y B_z}{\partial x} - \frac{\partial A_z B_y}{\partial x} = B_z \frac{\partial A_y}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_z}{\partial x} - B_y \frac{\partial A_z}{\partial x} - A_z \frac{\partial B_y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(A_z B_x - A_x B_z\right) = \frac{\partial A_z B_x}{\partial y} - \frac{\partial A_x B_z}{\partial y} = B_x \frac{\partial A_z}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_x}{\partial y} - B_z \frac{\partial A_x}{\partial y} - A_x \frac{\partial B_z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(A_x B_y - A_y B_x\right) = \frac{\partial A_x B_y}{\partial z} - \frac{\partial A_y B_x}{\partial z} = B_y \frac{\partial A_x}{\partial z} + A_x \frac{\partial B_y}{\partial z} - B_x \frac{\partial A_y}{\partial z} - A_y \frac{\partial B_x}{\partial z}$$

$$B_x \frac{\partial A_z}{\partial y} - B_x \frac{\partial A_y}{\partial z} + B_y \frac{\partial A_x}{\partial z} - B_y \frac{\partial A_z}{\partial x} + B_z \frac{\partial A_y}{\partial x} - B_z \frac{\partial A_x}{\partial y} + A_x \frac{\partial B_y}{\partial z} - A_x \frac{\partial B_z}{\partial y} + A_y \frac{\partial B_z}{\partial x} - A_y \frac{\partial B_x}{\partial z} + A_z \frac{\partial B_x}{\partial y} - A_z \frac{\partial B_y}{\partial x} \quad \cdot\cdot②$$

ベクトル解析の公式（４）発散・回転渦の定義

$$=B_x\frac{\partial A_z}{\partial y}-B_x\frac{\partial A_y}{\partial z}+B_y\frac{\partial A_x}{\partial z}-B_y\frac{\partial A_z}{\partial x}+B_z\frac{\partial A_y}{\partial x}-B_z\frac{\partial A_x}{\partial y}+A_x\frac{\partial B_y}{\partial z}-A_x\frac{\partial B_z}{\partial y}+A_y\frac{\partial B_z}{\partial x}-A_y\frac{\partial B_x}{\partial z}+A_z\frac{\partial B_x}{\partial y}-A_z\frac{\partial B_y}{\partial x}$$

$$=B_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+B_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+B_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)+A_x\left(\frac{\partial B_y}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial y}\right)+A_y\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial z}\right)+A_z\left(\frac{\partial B_x}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial x}\right)$$

$$=B_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+B_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+B_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)-A_x\left(\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z}\right)-A_y\left(\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)-A_z\left(\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\right) \quad \cdots③$$

$$\therefore \quad \nabla\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\vec{B}\cdot\left(\nabla\times\vec{A}\right)-\vec{A}\cdot\left(\nabla\times\vec{B}\right) \quad \cdots④$$

ベクトル解析の公式(5) 回転渦の発散

$$\mathrm{div}\left(\mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{A}}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{A}}\right)_x+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{A}}\right)_y+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{A}}\right)_z \quad \cdot\cdot①$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \quad \cdot\cdot②$$

微分の順序には影響を受けないので

$$=\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)=0 \quad \cdot\cdot③$$

$$\mathrm{div}\left(\mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{A}}\right)=0 \quad \cdot\cdot④$$

全てのベクトルAに対して一様に成り立つ関係式

ベクトル解析の公式(6) 回転渦の∇表現

$$\nabla = \overrightarrow{e_x}\frac{\partial}{\partial x} + \overrightarrow{e_y}\frac{\partial}{\partial y} + \overrightarrow{e_z}\frac{\partial}{\partial z} \quad \cdots ①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{A}} = A_x\overrightarrow{e_x} + A_y\overrightarrow{e_y} + A_z\overrightarrow{e_z} \quad \cdots ②$$

$$\nabla \times \overrightarrow{\mathrm{A}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad \cdots ③$$

$$\nabla \times \overrightarrow{\mathrm{A}} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\overrightarrow{e_y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{e_z} = \mathrm{rot}\,\overrightarrow{\mathrm{A}} \quad \cdots ④$$

ベクトル解析の公式(7)▽ φの発散・回転渦

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$$ ‥① とベクトルを定義する。

$$\mathrm{div}(\nabla\varphi) = \frac{\partial}{\partial x}(\nabla\varphi)_x + \frac{\partial}{\partial y}(\nabla\varphi)_y + \frac{\partial}{\partial z}(\nabla\varphi)_z$$

ベクトルの発散 ダイバージェンス

$$\mathrm{div}\nabla\varphi = \nabla\cdot(\nabla\varphi) = \nabla^2\varphi = \Delta\varphi = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$ ‥②

ベクトルの渦 ローテーション

微分の順序には影響を受けないので

$$\mathrm{rot}(\nabla\varphi) = \left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\overrightarrow{e_x} + \left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_y} + \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\overrightarrow{e_z} = \vec{0}$$ ‥③

ベクトル解析の公式(８)・回転渦

$$\mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{A}} = \nabla \times \vec{\mathrm{A}} \quad \cdot\cdot①$$

$$\mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{A}}\right) = \nabla \times \left(\nabla \times \vec{\mathrm{A}}\right) \quad \cdot\cdot②$$

$$\vec{\mathrm{A}} \times (\vec{\mathrm{B}} \times \vec{\mathrm{C}}) = \left(\vec{\mathrm{C}} \cdot \vec{\mathrm{A}}\right)\vec{\mathrm{B}} - \left(\vec{\mathrm{A}} \cdot \vec{\mathrm{B}}\right)\vec{\mathrm{C}} \quad \cdot\cdot③$$

の関係式を用いると

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{\mathrm{A}}) = \left(\vec{\mathrm{A}} \cdot \nabla\right)\nabla - (\nabla \cdot \nabla)\vec{\mathrm{A}} \quad \cdot\cdot④$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{\mathrm{A}}) = \nabla\left(\nabla \cdot \vec{\mathrm{A}}\right) - \nabla^2 \vec{\mathrm{A}}$$

$$\mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{A}}\right) = \nabla\left(\nabla \cdot \vec{\mathrm{A}}\right) - \nabla^2 \vec{\mathrm{A}} \quad \cdot\cdot⑤$$

$$\nabla \cdot \left(\varphi \vec{\mathrm{A}}\right) = \frac{\partial \varphi A_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi A_y}{\partial y} + \frac{\partial \varphi A_z}{\partial z}$$

$$= \varphi\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} A_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} A_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} A_z$$

$$\nabla \cdot \left(\varphi \vec{\mathrm{A}}\right) = \varphi \cdot \left(\nabla \cdot \vec{\mathrm{A}}\right) + (\nabla \varphi) \cdot \vec{\mathrm{A}} \quad \cdot\cdot⑥$$

ベクトル解析の公式(9)・回転渦

$$\nabla\times\left(\varphi\vec{A}\right)=\left(\frac{\partial\varphi A_z}{\partial y}-\frac{\partial\varphi A_y}{\partial z}\right)\vec{e_x}+\left(\frac{\partial\varphi A_x}{\partial z}-\frac{\partial\varphi A_z}{\partial x}\right)\vec{e_y}+\left(\frac{\partial\varphi A_y}{\partial x}-\frac{\partial\varphi A_x}{\partial y}\right)\vec{e_z}\quad\cdot\cdot①$$

$$\nabla\times\left(\varphi\vec{A}\right)=\varphi\left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e_x}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e_y}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e_z}\right]$$

$$+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}A_z-\frac{\partial\varphi}{\partial z}A_y\right)\vec{e_x}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}A_x-\frac{\partial\varphi}{\partial x}A_z\right)\vec{e_y}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}A_y-\frac{\partial\varphi}{\partial y}A_x\right)\vec{e_z}\quad\cdot\cdot②$$

$$\nabla\times\left(\varphi\vec{A}\right)=\varphi\left(\nabla\times\vec{A}\right)+(\nabla\varphi)\times\vec{A}\quad\cdot\cdot③$$

$$\nabla\times\left(\varphi\vec{A}\right)=\varphi\begin{vmatrix}\vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}\quad\cdot\cdot④$$

ベクトル解析の公式(10)

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{C}\cdot\vec{A})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C} \quad \cdots ①$$

$$\mathrm{div}\left(\mathrm{rot}\,\vec{A}\right)=0 \quad \cdots ②$$

$$\nabla\cdot\left(\varphi\vec{A}\right)=\varphi\cdot\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)+(\nabla\varphi)\cdot\vec{A} \quad \cdots ③$$

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{A})=\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)-\nabla^2\vec{A} \quad \cdots ④$$

$$\mathrm{rot}\left(\nabla\varphi\right)=\vec{0} \quad \cdots ⑤$$

$$\nabla\times\left(\varphi\vec{A}\right)=\varphi\left(\nabla\times\vec{A}\right)+(\nabla\varphi)\times\vec{A} \quad \cdots ⑥$$

$$\nabla\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\vec{B}\cdot\left(\nabla\times\vec{A}\right)-\vec{A}\cdot\left(\nabla\times\vec{B}\right) \quad \cdots ⑦$$

$$\nabla\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix} \quad \cdots ⑧$$

$$\nabla\times\left(\varphi\vec{A}\right)=\varphi\begin{vmatrix}\vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z}\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}$$

ポテンシャルの勾配・グラディエント(１)

$$\varphi(x, y, z) = c_1\text{(定数)} \quad \cdot\cdot①$$

の関係を満たす空間内の曲面S_1を考える。

この曲面S_1上のP点から曲面S_2上のQ点に移ったとすると

$$\varphi(x+dx, y+dy, z+dz) = c_2\text{(定数)} \quad \cdot\cdot②$$

$$\varphi(x+dx, y+dy, z+dz) - \varphi(x, y, z) = c_2 - c_1$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = c_2 - c_1 \quad \cdot\cdot③$$

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{e_z}$$

$$d\vec{r} = dx\,\vec{e_x} + dy\,\vec{e_y} + dz\,\vec{e_z}$$

$$\nabla\varphi\cdot d\vec{r} = grad\,\varphi\cdot d\vec{r} = c_2 - c_1 \quad \cdot\cdot④$$

$$\nabla\varphi\cdot d\vec{r} = |grad\,\varphi||d\vec{r}|\cos\theta = c_2 - c_1$$

gradφと同じ向きのφの変化率が正で最大となる

$d\vec{r}$ が、P点から曲面S_1上のQ点まで変位では

$$|grad\,\varphi||d\vec{r}|\cos\theta = c_1 - c_1 = 0 \quad \cdot\cdot⑤$$

cosθ=0すなわちθ=90° なのでgradφは、曲面Sに対して垂直でその向きのφの変化率は最大である。

PQ間の距離をΔsとするとき

$$\therefore \quad \frac{d\varphi}{ds}$$ PQの方向での方向変化率という

ポテンシャルの勾配・グラディエント(2)

PQ方向の単位ベクトルを

$$\vec{u} = l\overrightarrow{e_x} + m\overrightarrow{e_y} + n\overrightarrow{e_z} \quad \cdot\cdot⑥$$

$$= \frac{dx}{ds}\overrightarrow{e_x} + \frac{dy}{ds}\overrightarrow{e_y} + \frac{dz}{ds}\overrightarrow{e_z}$$

PQ方向の変位は

$$d\vec{r} = \vec{u}ds = \left(l\overrightarrow{e_x} + m\overrightarrow{e_y} + n\overrightarrow{e_z}\right)ds \quad \cdot\cdot⑦$$

$$d\varphi = \varphi(x + lds, y + mds, z + nds) - \varphi(x, y, z)$$

$$d\varphi = \nabla\varphi \cdot d\vec{r} = grad\,\varphi \cdot d\vec{r} \quad \cdot\cdot⑧$$

$$= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\overrightarrow{e_z}\right)\left(l\overrightarrow{e_x} + m\overrightarrow{e_y} + n\overrightarrow{e_z}\right)ds \cdot⑨$$

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}lds + \frac{\partial\varphi}{\partial y}mds + \frac{\partial\varphi}{\partial z}nds$$

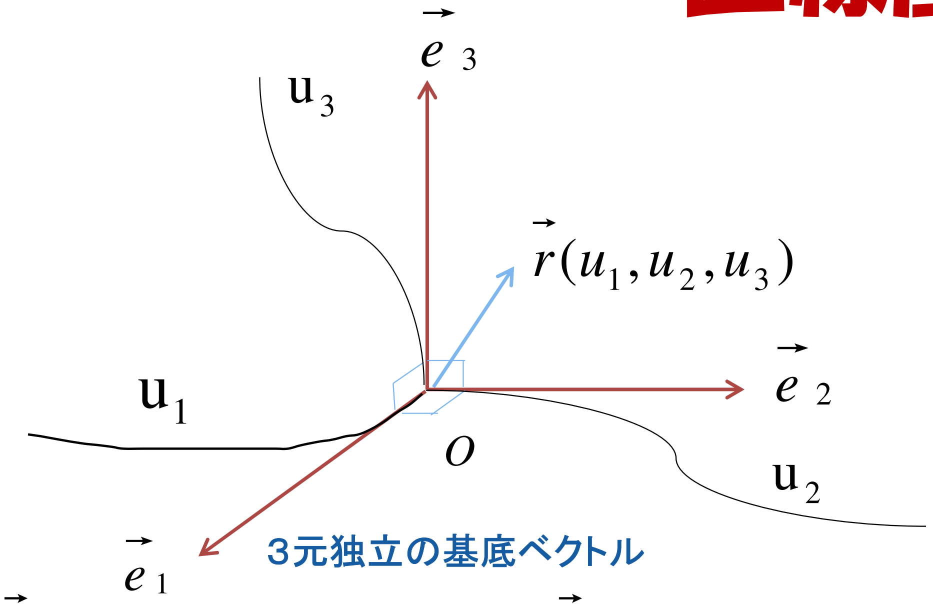
$$d\varphi = \left(l\frac{\partial\varphi}{\partial x} + m\frac{\partial\varphi}{\partial y} + n\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)ds$$

$$\therefore \quad \frac{d\varphi}{ds} = \left(l\frac{\partial}{\partial x} + m\frac{\partial}{\partial y} + n\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi \quad \cdot\cdot⑩$$

$$= \vec{u} \cdot \nabla\varphi = \vec{u} \cdot grad\,\varphi$$

$\dfrac{d\varphi}{ds}$ はPQの方向での方向変化率である。

曲線座標系（１）



$$\vec{r}(x_1,x_2,x_3) \Rightarrow \vec{r}(u_1,u_2,u_3)$$

変数の変更をする

$$x_1 = x(u_1,u_2,u_3) \quad x_2 = y(u_1,u_2,u_3) \quad x_3 = z(u_1,u_2,u_3)$$

$$dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial u_1}du_1 \quad dx_2 = \frac{\partial x_2}{\partial u_1}du_1 \quad dx_3 = \frac{\partial x_3}{\partial u_1}du_1 \quad \cdot\cdot①$$

$$dx_1{}^2 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u_1}\right)^2 du_1{}^2 \quad dx_2{}^2 = \left(\frac{\partial x_2}{\partial u_1}\right)^2 du_1{}^2 \quad dx_3{}^2 = \left(\frac{\partial x_3}{\partial u_1}\right)^2 du_1{}^2$$

$$ds_1{}^2 = \left(\left(\frac{\partial x_1}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial u_1}\right)^2\right)du_1{}^2$$

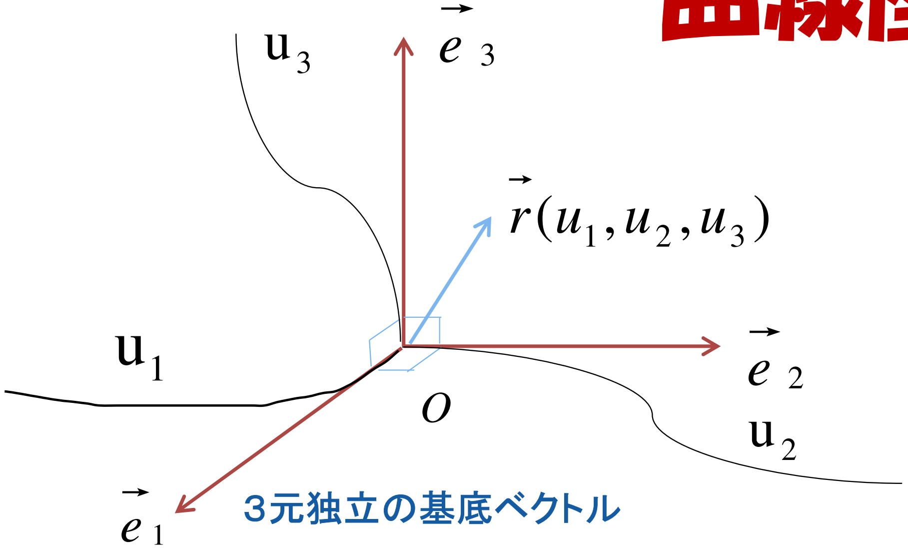
$$ds_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial u_1}\right)^2}\, du_1 = h_1 du_1 \quad \cdot\cdot②$$

ここで $h_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial u_1}\right)^2} \quad \cdot\cdot③$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u_1}, \frac{\partial x_2}{\partial u_1}, \frac{\partial x_3}{\partial u_1}\right)$$ なので

$$\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}\right)^2 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial u_1}\right)^2$$

曲線座標系（2）



$$\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial u_1}\right)^2} = h_1 \quad \cdot\cdot④$$

$$\vec{e}_1 = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}\right|} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}}{h_1} \quad \cdot\cdot⑤$$

$$h_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial u_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial u_2}\right)^2} \quad h_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial u_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial u_3}\right)^2}$$

と定義すると

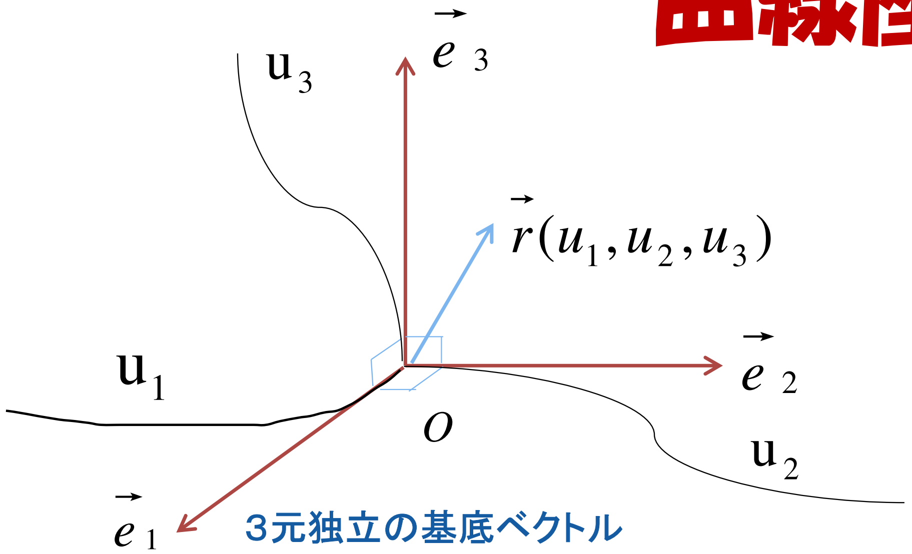
$$\vec{e}_2 = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}\right|} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}}{h_2} \qquad \vec{e}_3 = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3}}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3}\right|} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3}}{h_3} \quad \cdot\cdot⑥$$

同様に

$$ds_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial u_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial u_2}\right)^2}\, du_2 = h_2 du_2 \quad \cdot\cdot⑦$$

$$ds_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial u_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial u_3}\right)^2}\, du_3 = h_3 du_3 \quad \cdot\cdot⑧$$

曲線座標系（3）



$\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$

正規直交基底ベクトルとすれば

$\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2=0 \quad \vec{e}_1\cdot\vec{e}_3=0 \quad \vec{e}_2\cdot\vec{e}_3=0$

$\vec{e}_1\times\vec{e}_2=\vec{e}_3 \quad \vec{e}_2\times\vec{e}_3=\vec{e}_1 \quad \vec{e}_3\times\vec{e}_1=\vec{e}_2$

$\nabla\varphi=f_1\vec{e}_1+f_2\vec{e}_2+f_3\vec{e}_3$　とおいてみる

$\vec{r}=\vec{r}(u_1,u_2,u_3)$　とおいてみる

$$d\vec{r}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial\vec{r}}{\partial u_2}du_2+\frac{\partial\vec{r}}{\partial u_3}du_3 \quad \cdot\cdot⑨$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u_1}=h_1\vec{e}_1 \quad \frac{\partial\vec{r}}{\partial u_2}=h_2\vec{e}_2 \quad \frac{\partial\vec{r}}{\partial u_3}=h_3\vec{e}_3$$

$$d\vec{r}=h_1\vec{e}_1du_1+h_2\vec{e}_2du_2+h_3\vec{e}_3du_3 \quad \cdot\cdot⑩$$

$$\nabla\varphi\cdot d\vec{r}=\left(f_1\vec{e}_1+f_2\vec{e}_2+f_3\vec{e}_3\right)\cdot\left(h_1\vec{e}_1du_1+h_2\vec{e}_2du_2+h_3\vec{e}_3du_3\right)$$

$$d\varphi=f_1h_1du_1+f_2h_2du_2+f_3h_3du_3$$

$$d\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}du_2+\frac{\partial\varphi}{\partial u_3}du_3$$

曲線座標系（4）

$$f_1 h_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \quad f_2 h_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \quad f_3 h_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial u_3}$$

$$f_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \quad f_2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \quad f_3 = \frac{1}{h_3}\frac{\partial \varphi}{\partial u_3}$$

$$\nabla \varphi = \frac{\vec{e}_1}{h_1}\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} + \frac{\vec{e}_2}{h_2}\frac{\partial \varphi}{\partial u_2} + \frac{\vec{e}_3}{h_3}\frac{\partial \varphi}{\partial u_3}$$ となる。

$$\nabla \varphi = \left(\frac{\vec{e}_1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\vec{e}_2}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2} + \frac{\vec{e}_3}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3} \right)\varphi$$

$$\therefore \boxed{\nabla = \frac{\vec{e}_1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\vec{e}_2}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2} + \frac{\vec{e}_3}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}}$$

(u_1, u_2, u_3) はお互いに独立な変数なので

$$\nabla u_1 = \left(\frac{\vec{e}_1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\vec{e}_2}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2} + \frac{\vec{e}_3}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3} \right) u_1 \longrightarrow \nabla u_1 = \frac{\vec{e}_1}{h_1}$$

同様に $\nabla u_2 = \dfrac{\vec{e}_2}{h_2} \quad \nabla u_3 = \dfrac{\vec{e}_3}{h_3}$

$$\therefore \quad \vec{e}_1 = h_1 \nabla u_1 \quad \vec{e}_2 = h_2 \nabla u_2 \quad \vec{e}_3 = h_3 \nabla u_3$$

$\vec{\mathrm{A}} = \nabla \varphi$ とすると

$$A_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \quad A_2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \quad A_3 = \frac{1}{h_3}\frac{\partial \varphi}{\partial u_3}$$

$$\vec{e}_1 = \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = h_2 h_3 \nabla u_2 \times \nabla u_3$$

$$\vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = h_3 h_1 \nabla u_3 \times \nabla u_1$$

$$\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = h_1 h_2 \nabla u_1 \times \nabla u_2$$

曲線座標系（5）

$\overrightarrow{\mathrm{A}} = A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2 + A_3\vec{e}_3$ とすると

$$\nabla\cdot\overrightarrow{\mathrm{A}} = \nabla\cdot\left(A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2 + A_3\vec{e}_3\right)$$

$$\nabla\cdot\left(A_1\vec{e}_1\right) = \nabla\cdot\left(A_1h_2h_3\left(\nabla u_2\times\nabla u_3\right)\right)$$

$$\nabla\cdot\left(A_1\vec{e}_1\right) = \nabla\cdot\left(A_1h_2h_3\right)\left(\nabla u_2\times\nabla u_3\right) + A_1h_2h_3\nabla\cdot\left(\nabla u_2\times\nabla u_3\right)$$

$$\nabla\cdot\left(A_1\vec{e}_1\right) = \nabla\cdot\left(A_1h_2h_3\right)\left(\nabla u_2\times\nabla u_3\right) + A_1h_2h_3\left(\nabla u_3\cdot\left(\nabla\times\nabla u_2\right) - \nabla u_2\cdot\left(\nabla\times\nabla u_3\right)\right)$$

$$\nabla\cdot\left(A_1\vec{e}_1\right) = \nabla\cdot\left(A_1h_2h_3\right)\left(\nabla u_2\times\nabla u_3\right)$$

$$\nabla\cdot\left(A_1\vec{e}_1\right) = \frac{\vec{e}_1}{h_2h_3}\nabla\cdot\left(A_1h_2h_3\right) = \frac{\vec{e}_1}{h_2h_3}\left(\frac{\vec{e}_1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\vec{e}_2}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2} + \frac{\vec{e}_3}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}\right)\left(A_1h_2h_3\right) = \frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_1}\left(A_1h_2h_3\right)$$

同様にして $\quad \nabla\cdot\left(A_2\vec{e}_2\right) = \frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_2}\left(A_2h_3h_1\right) \quad \nabla\cdot\left(A_3\vec{e}_3\right) = \frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}\left(A_3h_1h_2\right)$

曲線座標系（６）

$$\nabla\cdot\vec{\mathrm{A}}=\nabla\cdot\left(A_1\vec{e}_1+A_2\vec{e}_2+A_3\vec{e}_3\right)=\nabla\cdot\nabla\varphi=\nabla^2\varphi$$

$$=\frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_1}\left(A_1h_2h_3\right)+\frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_2}\left(A_2h_3h_1\right)+\frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}\left(A_3h_1h_2\right)$$

$A_1=\dfrac{1}{h_1}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_1}\quad A_2=\dfrac{1}{h_2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_2}\quad A_3=\dfrac{1}{h_3}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_3}$ を代入すると

$$\boxed{\nabla^2\varphi=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}\right)+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial u_3}\right)\right)}$$

曲線座標系（7）

$$\nabla\times\vec{A}=\nabla\times\left(A_1\vec{e}_1+A_2\vec{e}_2+A_3\vec{e}_3\right)$$

$$\nabla\times\left(A_1\vec{e}_1\right)=\nabla\times\left(A_1h_1\nabla u_1\right)=A_1h_1\left(\nabla\times\nabla u_1\right)+\nabla\left(A_1h_1\right)\times\left(\nabla u_1\right)=\nabla\left(A_1h_1\right)\times\left(\nabla u_1\right)$$

$$\boxed{\nabla=\left(\frac{\vec{e}_1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}+\frac{\vec{e}_2}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}+\frac{\vec{e}_3}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}\right)\longrightarrow\nabla u_1=\frac{\vec{e}_1}{h_1}}$$

$$=\left(\frac{\vec{e}_1}{h_1}\frac{\partial\left(A_1h_1\right)}{\partial u_1}+\frac{\vec{e}_2}{h_2}\frac{\partial\left(A_1h_1\right)}{\partial u_2}+\frac{\vec{e}_3}{h_3}\frac{\partial\left(A_1h_1\right)}{\partial u_3}\right)\times\frac{\vec{e}_1}{h_1}=\left(\frac{\vec{e}_1\times\vec{e}_1}{h_1h_1}\frac{\partial\left(A_1h_1\right)}{\partial u_1}+\frac{\vec{e}_2\times\vec{e}_1}{h_1h_2}\frac{\partial\left(A_1h_1\right)}{\partial u_2}+\frac{\vec{e}_3\times\vec{e}_1}{h_3h_1}\frac{\partial\left(A_1h_1\right)}{\partial u_3}\right)$$

$$\nabla\times\left(A_1\vec{e}_1\right)=\left(\frac{\vec{e}_2}{h_3h_1}\frac{\partial\left(A_1h_1\right)}{\partial u_3}-\frac{\vec{e}_3}{h_1h_2}\frac{\partial\left(A_1h_1\right)}{\partial u_2}\right)\qquad\nabla\times\left(A_2\vec{e}_2\right)=\left(\frac{\vec{e}_3}{h_1h_2}\frac{\partial\left(A_2h_2\right)}{\partial u_1}-\frac{\vec{e}_1}{h_2h_3}\frac{\partial\left(A_2h_2\right)}{\partial u_3}\right)$$

$$\nabla\times\left(A_3\vec{e}_3\right)=\left(\frac{\vec{e}_1}{h_2h_3}\frac{\partial\left(A_3h_3\right)}{\partial u_2}-\frac{\vec{e}_2}{h_3h_1}\frac{\partial\left(A_3h_3\right)}{\partial u_1}\right)$$

曲線座標系（8）

$$\nabla\times\left(A_1\vec{e}_1\right)=\left(\frac{\vec{e}_2}{h_3h_1}\frac{\partial(A_1h_1)}{\partial u_3}-\frac{\vec{e}_3}{h_1h_2}\frac{\partial(A_1h_1)}{\partial u_2}\right)\quad\nabla\times\left(A_2\vec{e}_2\right)=\left(\frac{\vec{e}_3}{h_1h_{21}}\frac{\partial(A_2h_2)}{\partial u_1}-\frac{\vec{e}_1}{h_2h_3}\frac{\partial(A_2h_2)}{\partial u_3}\right)$$

$$\nabla\times\left(A_3\vec{e}_3\right)=\left(\frac{\vec{e}_1}{h_2h_3}\frac{\partial(A_3h_3)}{\partial u_2}-\frac{\vec{e}_2}{h_3h_1}\frac{\partial(A_3h_3)}{\partial u_1}\right)\quad\cdot\cdot①$$

$$\boxed{\nabla\times\vec{\mathrm{A}}=\frac{\vec{e}_1}{h_2h_3}\left(\frac{\partial(A_3h_3)}{\partial u_2}-\frac{\partial(A_2h_2)}{\partial u_3}\right)+\frac{\vec{e}_2}{h_3h_1}\left(\frac{\partial(A_1h_1)}{\partial u_3}-\frac{\partial(A_3h_3)}{\partial u_1}\right)+\frac{\vec{e}_3}{h_1h_2}\left(\frac{\partial(A_2h_2)}{\partial u_1}-\frac{\partial(A_1h_1)}{\partial u_2}\right)\quad\cdot\cdot②}$$

$$\boxed{\nabla\times\vec{\mathrm{A}}=\begin{vmatrix}\dfrac{\vec{e}_1}{h_2h_3} & \dfrac{\vec{e}_2}{h_3h_1} & \dfrac{\vec{e}_3}{h_1h_2}\\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3}\\ A_1h_1 & A_2h_2 & A_3h_3\end{vmatrix}\quad\cdot\cdot③}$$

$\vec{\mathrm{A}}=\nabla\varphi$　とすると

$$A_1=\frac{1}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\quad A_2=\frac{1}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}\quad A_3=\frac{1}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial u_3}$$

$$\vec{e}_1=\vec{e}_2\times\vec{e}_3=h_2h_3\nabla u_2\times\nabla u_3\quad\cdot\cdot④$$

$$\vec{e}_2=\vec{e}_3\times\vec{e}_1=h_3h_1\nabla u_3\times\nabla u_1$$

$$\vec{e}_3=\vec{e}_1\times\vec{e}_2=h_1h_2\nabla u_1\times\nabla u_2$$

曲線座標系（９）

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{座標変換}} \begin{pmatrix} r & \theta & \varphi \end{pmatrix}$$ 球面座標系

$$x = r\sin\theta\cos\varphi \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi \qquad z = r\cos\theta$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \sin\theta\cos\varphi \qquad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta\sin\varphi \qquad \frac{\partial z}{\partial r} = \cos\theta$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = r\cos\theta\cos\varphi \qquad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta\sin\varphi \qquad \frac{\partial z}{\partial \theta} = -r\sin\theta$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r\sin\theta\sin\varphi \qquad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r\sin\theta\cos\varphi \qquad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0$$

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}\right)\right\}$$

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r^2\sin\theta}{1}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial \varphi}\right)\right\}$$

$$h_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2}$$

$$h_1 = \sqrt{(\sin\theta\cos\varphi)^2 + (\sin\theta\sin\varphi)^2 + (\cos\theta)^2}$$

$$h_1 = 1$$

$$h_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2}$$

$$h_2 = \sqrt{(r\cos\theta\cos\varphi)^2 + (r\cos\theta\sin\varphi)^2 + (-r\sin\theta)^2}$$

$$h_2 = r$$

$$h_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}$$

$$h_3 = \sqrt{(-r\sin\theta\sin\varphi)^2 + (r\sin\theta\cos\varphi)^2 + (0)^2}$$

$$h_3 = r\sin\theta$$

曲線座標系（10）

$(x \quad y \quad z)$ → $(r \quad \theta \quad \varphi)$ 球面座標系

座標変換

$$\nabla=\frac{\vec{e}_1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}+\frac{\vec{e}_2}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}+\frac{\vec{e}_3}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3} \qquad \nabla=\frac{\vec{e}_1}{1}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\vec{e}_2}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}+\frac{\vec{e}_3}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} \quad \cdot\cdot① $$

$$\nabla^2\Phi=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}\right)+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}\right)\right\}$$

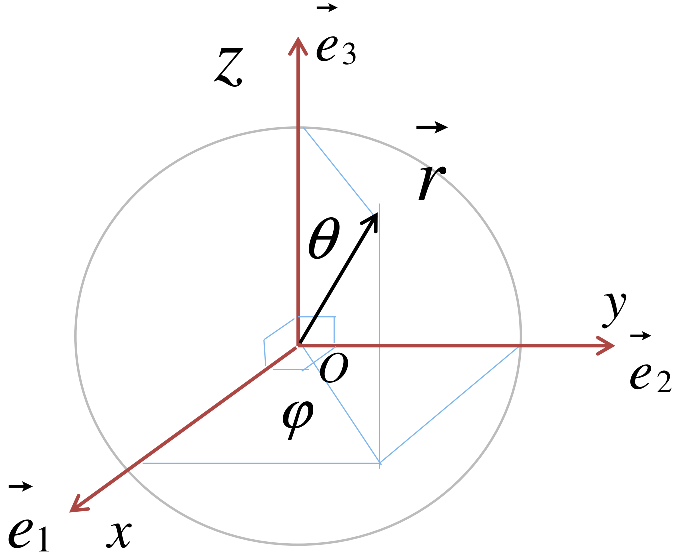
$$\nabla^2\Phi=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r^2\sin\theta}{1}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial \theta}\right)+\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial \varphi}\right)\right\} \quad \cdot\cdot②$$

$$\nabla\times\vec{\mathrm{A}}=\begin{vmatrix}\frac{\vec{e}_1}{h_2h_3} & \frac{\vec{e}_2}{h_3h_1} & \frac{\vec{e}_3}{h_1h_2}\\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3}\\ A_1h_1 & A_2h_2 & A_3h_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\vec{e}_1}{r^2\sin\theta} & \frac{\vec{e}_2}{r\sin\theta} & \frac{\vec{e}_3}{r}\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi}\\ A_r & A_\theta r & A_\varphi r\sin\theta\end{vmatrix} \quad \cdot\cdot③$$

$h_1=1$

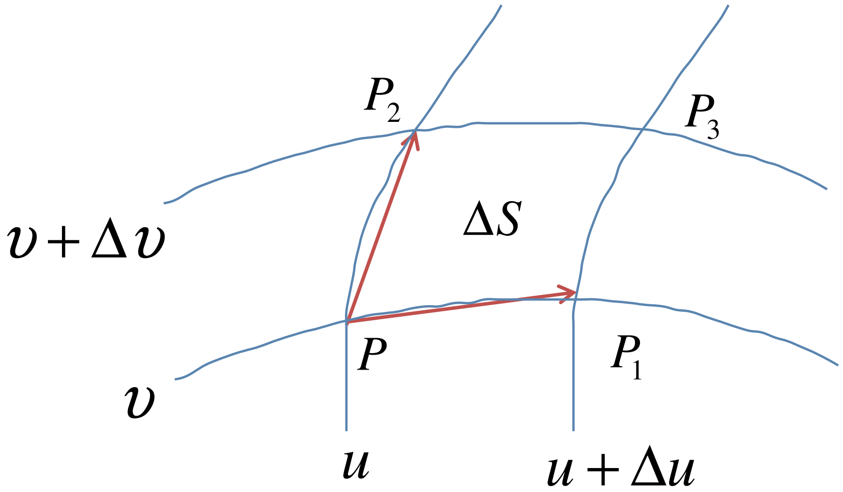
$h_2=r$

$h_3=r\sin\theta$



曲面の面積（１）

空間内の曲面は、vとuの二つの変数で
表わせる。



$$\overrightarrow{PP_1} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\Delta u \qquad \overrightarrow{PP_2} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\Delta v$$

$$\vec{r} = \vec{r}(u,\quad v)$$

$$\vec{r} = (x(u\quad v),\quad y(u\quad v),\quad z(u\quad v))$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x(u\quad v)}{\partial u},\quad \frac{\partial y(u\quad v)}{\partial u},\quad \frac{\partial z(u\quad v)}{\partial u}\right)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x(u\quad v)}{\partial v},\quad \frac{\partial y(u\quad v)}{\partial v},\quad \frac{\partial z(u\quad v)}{\partial v}\right)$$

$$\Delta S \fallingdotseq \left|\overrightarrow{PP_1} \times \overrightarrow{PP_2}\right| \qquad \Delta S \fallingdotseq \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|\Delta u \Delta v$$

曲面の面積（2）

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}=\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right)i+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)j+\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)k$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}=\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}i+\begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v}\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix}j+\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}k$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}=\frac{\partial(y,\ z)}{\partial(u,\ v)}i+\frac{\partial(z,\ x)}{\partial(u,\ v)}j+\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}k$$

関数行列式で表せる。

$$\frac{\partial(y,\ z)}{\partial(u,\ v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}$$

外積が、行列式を用いて表せる。

曲面の面積（3）

$$\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|^2=\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right|^2\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|^2\sin^2\theta$$

$$\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|^2=\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right|^2\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|^2\left(1-\cos^2\theta\right)$$

$$\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|^2=\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right|^2\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|^2-\left(\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right|\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|\cos\theta\right)^2$$

$$\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|^2=\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right|^2\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|^2-\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)^2$$

$$E=\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right|^2 \quad F=\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right) \quad G=\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|^2$$

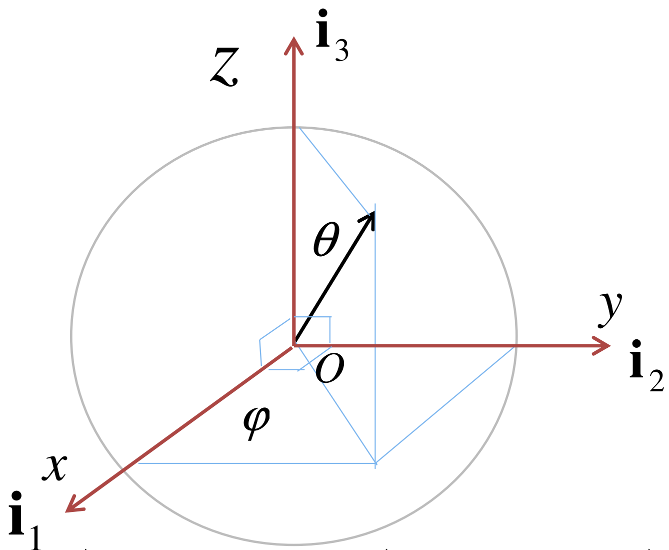
$$\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|=\sqrt{E\cdot G-F^2}$$

$$\Delta S \fallingdotseq \sqrt{E\cdot G-F^2}\,\Delta u\Delta v$$

$$S=\iint\sqrt{E\cdot G-F^2}\,\Delta u\Delta v$$

球面の面積（１）

半径rの球面の表面積を求める。 θとφの二変数で球面は表される。



$$x = r\sin\theta\cos\varphi \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi \qquad z = r\cos\theta$$

$$\frac{\partial x}{\partial\theta} = r\cos\theta\cos\varphi \qquad \frac{\partial y}{\partial\theta} = r\cos\theta\sin\varphi \qquad \frac{\partial z}{\partial\theta} = -r\sin\theta$$

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi} = -r\sin\theta\sin\varphi \qquad \frac{\partial y}{\partial\varphi} = r\sin\theta\cos\varphi \qquad \frac{\partial z}{\partial\varphi} = 0$$

$$E = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right|^2 = r^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\theta = r^2\cos^2\theta\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) + r^2\sin^2\theta = r^2\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) = r^2$$

$$G = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right|^2 = r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi = r^2\sin^2\theta\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right) = r^2\sin^2\theta$$

$$F = \left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right) = -r^2\cos\theta\cos\varphi\sin\theta\sin\varphi + r^2\cos\theta\sin\varphi\sin\theta\cos\varphi = 0$$

球面の面積（２）

$$\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\right| = \sqrt{E\cdot G - F^2}$$

$$= \sqrt{r^2\cdot r^2 \sin^2\theta - 0^2} = r^2 \sin\theta$$

$$S = \iint \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\right| d\theta d\varphi$$

$$S = \iint \sqrt{E\cdot G - F^2}\, d\theta d\varphi$$

$$S = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$S = r^2 \int_0^{2\pi} \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} d\varphi = r^2 \int_0^{2\pi} \left[-\cos\pi + \cos 0\right]_0^{\pi} d\varphi$$

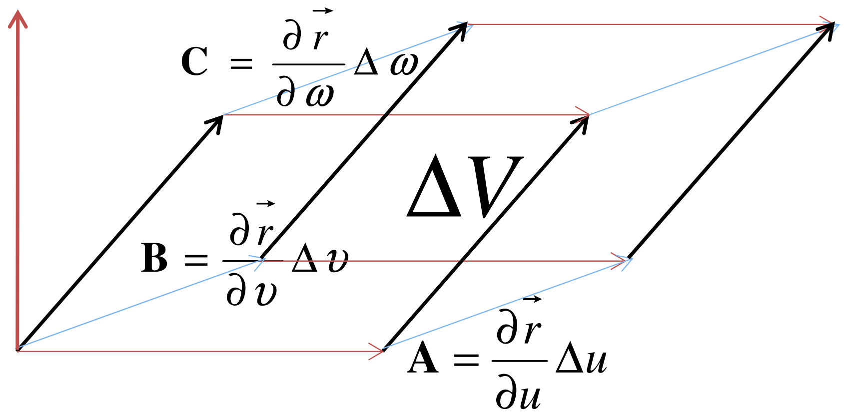
$$S = r^2 \int_0^{2\pi} 2 d\varphi = 2r^2 \int_0^{2\pi} d\varphi = 2r^2\cdot 2\pi = 4\pi r^2$$

球の体積（１）

$$\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=(C_1\mathbf{i}_1+C_2\mathbf{i}_2+C_3\mathbf{i}_3)\cdot\begin{vmatrix}\mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3\\ A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix}$$

$$=C_1\begin{vmatrix}A_2 & A_3\\ B_2 & B_3\end{vmatrix}-C_2\begin{vmatrix}A_1 & A_3\\ B_1 & B_3\end{vmatrix}+C_3\begin{vmatrix}A_1 & A_2\\ B_1 & B_2\end{vmatrix}$$

$$\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\begin{vmatrix}C_1 & C_2 & C_3\\ A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix}$$



三重積で求められる平行6面体の体積は

$$\Delta V=\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial\omega}\right)\cdot\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right)\Delta u\Delta v\Delta\omega=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial\omega} & \dfrac{\partial y}{\partial\omega} & \dfrac{\partial z}{\partial\omega}\\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u}\\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}\Delta u\Delta v\Delta\omega$$

球の体積（２）

$$\Delta V=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r}\\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta}\\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi}\end{vmatrix}\Delta r\Delta\theta\Delta\varphi=\frac{\partial(x\quad y\quad z)}{\partial(r\quad \theta\quad \varphi)}\Delta r\Delta\theta\Delta\varphi$$

$$\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0\end{vmatrix}\Delta r\Delta\theta\Delta\varphi$$

行列式を用いて表せる。

$x=r\sin\theta\cos\varphi$ $\quad y=r\sin\theta\sin\varphi$ $\quad z=r\cos\theta$

$$\frac{\partial x}{\partial r}=\sin\theta\cos\varphi \quad \frac{\partial y}{\partial r}=\sin\theta\sin\varphi \quad \frac{\partial z}{\partial r}=\cos\theta$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta}=r\cos\theta\cos\varphi \quad \frac{\partial y}{\partial \theta}=r\cos\theta\sin\varphi \quad \frac{\partial z}{\partial \theta}=-r\sin\theta$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi}=-r\sin\theta\sin\varphi \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi}=r\sin\theta\cos\varphi \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi}=0$$

球の体積（3）

$$\frac{\partial(x \quad y \quad z)}{\partial(r \quad \theta \quad \varphi)} = r^2 \sin^3\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^3\theta\sin^2\varphi + r^2\cos^2\theta\sin\theta$$

$$= r^2\sin^3\theta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + r^2\cos^2\theta\sin\theta$$

$$= r^2\sin^3\theta + r^2\cos^2\theta\sin\theta$$

$$= r^2\sin\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = r^2\sin\theta$$

$$dV = \frac{\partial(x \quad y \quad z)}{\partial(r \quad \theta \quad \varphi)} dr\,d\theta\,d\varphi = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$= \frac{4\pi R^3}{3}$$

電磁気学への応用

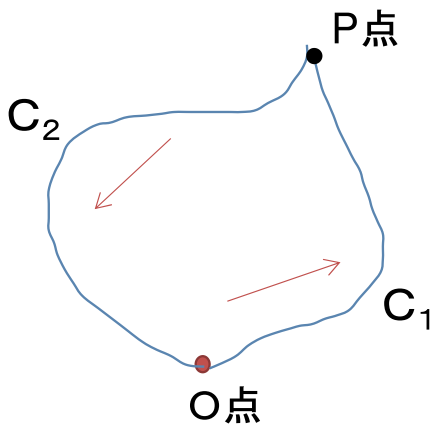
- 電位ポテンシャル
- ポアソン方程式
- グリーン関数
- 電気双極子モーメント
- ガウスの法則
- オーム・ジュールの法則
- ファラデーの法則

- アンペールの法則
- マクスウェルの電磁方程式
- 電磁波の方程式
- ベクトルポテンシャルの導出
- ビオ・サバールの法則
- ベクトルポテンシャルの展開

電位ポテンシャル(1)

$$\oint_{C_1+C_2} \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int \mathrm{rot}\,\vec{E}\cdot d\vec{S} = 0 \quad \cdots ①$$

の条件が成り立つ場合、P点からO点まで移動する間に電場が電荷対してする仕事は移動経路には関係なく同じである。＋1 Cの電荷について電場のする仕事は次のように表せる。



$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0$$

ポテンシャルを持つ条件式

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_{O\,(C_1)}^{P} \vec{E}\cdot d\vec{r} + \int_{P\,(C_2)}^{O} \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0 \quad \cdots ②$$

$$-\int_{P\,(-C_1)}^{O} \vec{E}\cdot d\vec{r} + \int_{P\,(C_2)}^{O} \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0 \quad \cdots ③$$

$$\int_{P\,(-C_1)}^{O} \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_{P\,(C_2)}^{O} \vec{E}\cdot d\vec{r} \quad \cdots ④$$

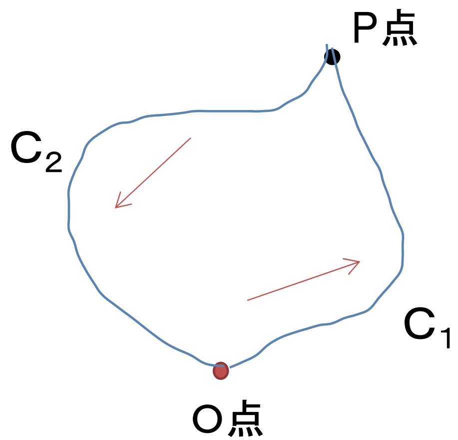
$$\varphi(\vec{r}) = \int_{P\,(-C_1)}^{O} \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_{P\,(C_2)}^{O} \vec{E}\cdot d\vec{r} \quad \cdots ④$$

P点からO点まで移動するときに電場のする仕事がその経路によらないとき、電荷はポテンシャルを持つといい、その仕事を電位[V]と定義する。

$$\varphi(\vec{r})[\mathrm{V}] = -\int_{O}^{P} \vec{E}\cdot d\vec{r} \quad \cdots ⑤$$

電位ポテンシャル(2)

$$\varphi(\vec{r})[\mathrm{V}] = -\int_O^P \vec{\mathrm{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \quad \cdot\cdot⑤$$



$$d\varphi(\vec{r}) = -\vec{\mathrm{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \quad \cdot\cdot⑥$$

$$d\varphi(\vec{r}) = grad\,\varphi(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\vec{\mathrm{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$\therefore \quad \vec{\mathrm{E}} = -grad\,\varphi(\vec{r}) = -\nabla\varphi(\vec{r}) \quad \cdot\cdot⑦$$

ガウスの発散定理より

$$\mathrm{div}\,\vec{\mathrm{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \cdot\cdot⑧$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathrm{E}} = \nabla\left(-\nabla\varphi(\vec{r})\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \nabla\left(\nabla\varphi(\vec{r})\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla^2\varphi(\vec{r}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \cdot\cdot⑨$$

ポアソン方程式という。

電位ポテンシャル(3)

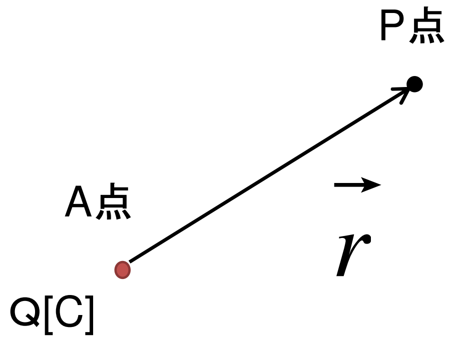
$$\nabla^2 \varphi(\vec{r}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \cdot\cdot⑥$$

ポアソン方程式

Q[c]の電荷がA点に存在するときA点からrはなれた
P点での電位ポテンシャルは次の通りである。

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad \cdot\cdot⑦ \qquad \left|\vec{r}\right| = r$$

$$\varphi(\vec{r}) = \iiint \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0 r} d^3\vec{r} \quad \cdot\cdot⑧$$



$$\varphi(\vec{r}) = \int_r^\infty \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr \quad \cdot\cdot⑨$$

積分の経路には依らないのでP点から基準となる∞まで
直線的に移動すると

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_r^\infty \frac{1}{r^2} dr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{r}\right]_r^\infty$$

$$\varphi(\vec{r}) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{\infty} - \frac{1}{r}\right]_r^\infty = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

電荷の持つエネルギー（１）

電荷の相互間でのエネルギーUは

$$U=\sum_{i<j}\frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}\quad\cdot\cdot①$$

電荷を2回足し算することになるので

$$U=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}q_i\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}\quad\cdot\cdot②$$

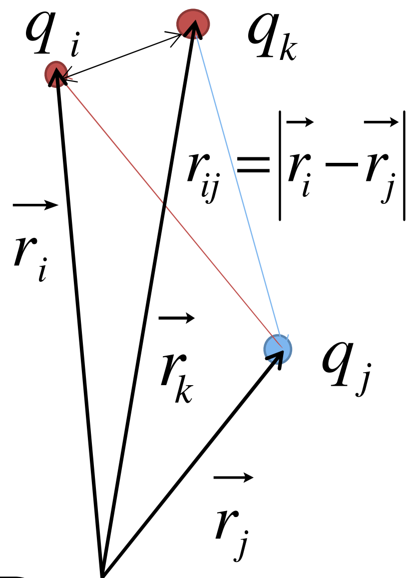
$$r_{ij}=\left|\vec{r}_i-\vec{r}_j\right|$$

電荷iの場所にi以外の電荷の作る電位ポテンシャルは

$$\varphi_i=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}\quad\cdot\cdot③$$

$$U=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}q_i\varphi_i\quad\cdot\cdot④$$

$$\varphi(\vec{r})=\iiint\frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}d^3\vec{r}'\quad\cdot\cdot⑤$$



積分形で表すと

$$\boxed{U=\frac{1}{2}\iiint\rho(\vec{r})\varphi(\vec{r})\mathrm{dV}\quad\cdot\cdot⑥}$$

ポアソン方程式の解(グリーン関数の活用)

$$\nabla^2 \varphi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \quad \cdots ①$$

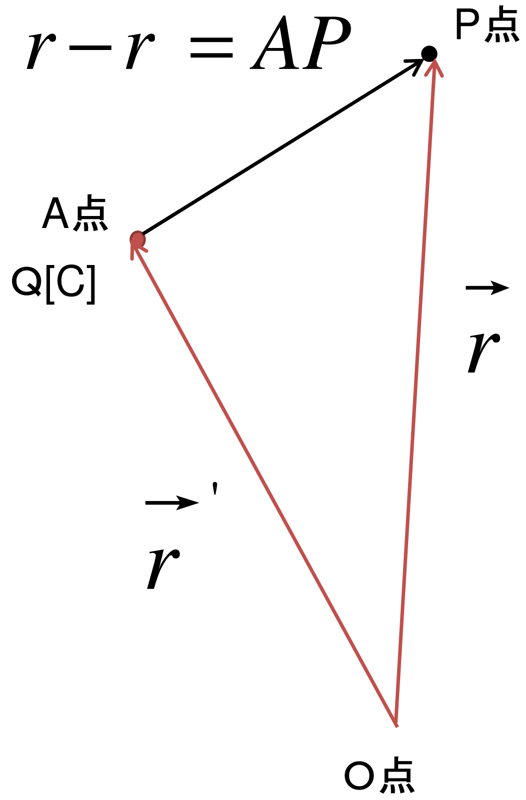
ポアソン方程式をグリーン関数を用いて解く。

Q[c]の電荷がA点に存在するときA点からr[m]はなれたP点での電位ポテンシャルは次の通りである。

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad \cdots ② \qquad \left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right| = r$$

$$\varphi(\vec{r}) = \iiint \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0 r} d^3 \vec{r}\,' \quad \cdots ③$$

$$\vec{r} - \vec{r}\,' = \overrightarrow{AP}$$



グリーン関数の活用（定義）

微分方程式の解φが、グリーン関数を用いることにより積分計算で求められる。

$$\Omega G(\vec{r}) = \delta(\vec{r}) \quad \cdots ①$$

$$\Omega \varphi(\vec{r}) = s(\vec{r}) \quad \cdots ②$$

が成立するときに、グリーン関数 $G(\vec{r})$ を用いると②の解 $\varphi(\vec{r})$ は

$$\varphi(\vec{r}) = \int G(\vec{r} - \vec{r}')s(\vec{r}')d\vec{r}' \cdots ③$$

と求められる。

（証明）

$$\Omega \varphi(\vec{r}) = \int \Omega G(\vec{r} - \vec{r}')s(\vec{r}')d\vec{r}' \cdots ④$$

$$\Omega \varphi(\vec{r}) = \int s(\vec{r}')\delta(\vec{r} - \vec{r}')d\vec{r}' = s(\vec{r}) \quad \cdots ⑤$$

∴

③で示される関数 $\varphi(\vec{r})$ は②を満たす。

微分方程式　→　積分方程式　への変更

グリーン関数の活用（１）

$\Omega = \left(\nabla^2 - m^2\right)$ の場合

$$\left(\nabla^2 - m^2\right) G(\vec{r}) = \delta(\vec{r})$$

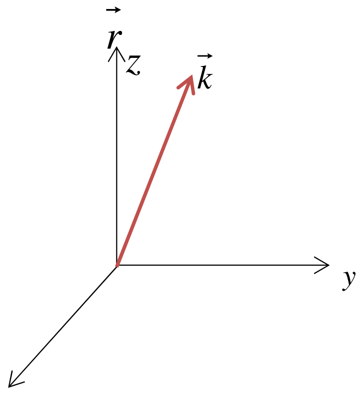
$$\left(\nabla^2 - m^2\right) \varphi(\vec{r}) = s(\vec{r})$$

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \tilde{G}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{r}} d^3\vec{k}$$

$$\left(\nabla^2 - m^2\right) G(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \tilde{G}(\vec{k}) \left(\nabla^2 - m^2\right) e^{i\vec{k}\vec{r}} d^3\vec{k}$$

$$\delta(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \underbrace{\tilde{G}(\vec{k}) \left(-\vec{k}^2 - m^2\right)}_{1} e^{i\vec{k}\vec{r}} d^3\vec{k} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{k}\vec{r}} d^3\vec{k}$$

$$\therefore \tilde{G}(\vec{k}) = -\frac{1}{\vec{k}^2 + m^2}$$



$$G(\vec{r}) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{\vec{k}^2 + m^2} e^{i\vec{k}\vec{r}} d^3\vec{k}$$

$$d\vec{k} = k^2 dk \sin\theta d\theta d\phi$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{1}{k^2 + m^2} e^{ikr\cos\theta} k^2 \sin\theta$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \int_0^\pi d\theta \frac{k^2}{k^2 + m^2} e^{ikr\cos\theta} \sin\theta$$

$$t = \cos\theta \qquad dt = -\sin\theta d\theta \quad \sin\theta d\theta = -dt$$

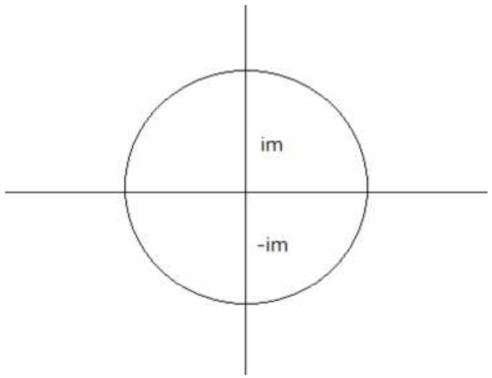
$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \int_1^{-1} dt \frac{k^2}{k^2 + m^2} e^{ikrt}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{k^2 + m^2} \left[\frac{e^{ikrt}}{ikr}\right]_1^{-1}$$

グリーン関数の活用(2)

$$G(\vec{r}) = -\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k}{k^2+m^2}\frac{e^{ikr}}{ir}dk$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^2}\frac{1}{r}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ke^{ikr}}{k^2+m^2}dk$$



留数定理を用いる。上半分の周回について積分する。

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{\infty}\frac{k^2}{k^2+m^2}\left(\frac{e^{-ikr}-e^{ikr}}{ikr}\right)dk$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{\infty}\frac{k}{k^2+m^2}\left(\frac{e^{-ikr}-e^{ikr}}{ir}\right)dk$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\left\{\int_0^{\infty}\frac{k}{k^2+m^2}\frac{e^{-ikr}}{ir}dk - \int_0^{\infty}\frac{k}{k^2+m^2}\frac{e^{ikr}}{ir}dk\right\}$$

$k=-\xi$とおく。 $dk=-d\xi$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\left\{\int_0^{-\infty}\frac{\xi}{\xi^2+m^2}\frac{e^{i\xi r}}{ir}d\xi - \int_0^{\infty}\frac{k}{k^2+m^2}\frac{e^{ikr}}{ir}dk\right\}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\left\{-\int_{-\infty}^{0}\frac{\xi}{\xi^2+m^2}\frac{e^{i\xi r}}{ir}d\xi - \int_0^{\infty}\frac{k}{k^2+m^2}\frac{e^{ikr}}{ir}dk\right\}$$

グリーン関数の活用(３)

$$= \frac{i}{(2\pi)^2} \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k - im} + \frac{1}{k + im} \right) e^{ikr} dk$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^2} \frac{1}{r} 2\pi i \cdot \mathrm{Res}[im] = \frac{i}{(2\pi)^2} \frac{1}{r} 2\pi i \frac{1}{2} e^{iimr}$$

$$= -\frac{1}{4\pi r} e^{-mr}$$

ここで極の位置を原点に近づける。 $m \to 0$

$$G(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi r}$$

$s(\vec{r}) = -\dfrac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$ ならば

$$\varphi(\vec{r}) = \int G(\vec{r} - \vec{r}\,')s(\vec{r}\,')d^3\vec{r}\,' \cdots ③$$

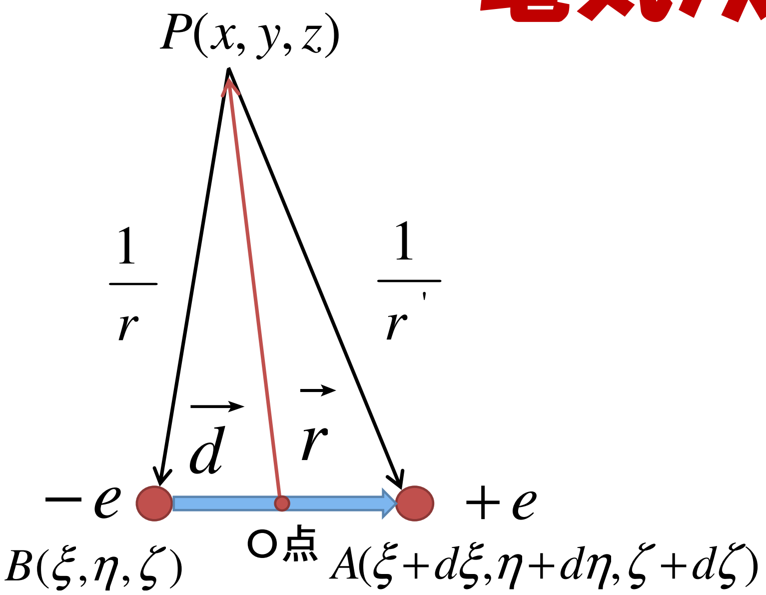
$$G(\vec{r} - \vec{r}\,') = -\frac{1}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \int \left(-\frac{1}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}\,'|} \right) \left(-\frac{\rho(\vec{r}\,')}{\varepsilon_0} \right) d^3\vec{r}\,'$$

$$\varphi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}\,'|} d^3\vec{r}\,'$$

<u>空間に点在する電荷により、電位のポテンシャルが求められる</u>ことを示す。

電気双極子モーメント（1）



P点の電位ポテンシャルは

$$\varphi=\frac{e}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r}\right)\quad\cdot\cdot①$$

$$\vec{d}=\overrightarrow{BA}=(d\xi,d\eta,d\zeta)$$

$$\frac{1}{r'}-\frac{1}{r}=\nabla_o\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\vec{d}$$

$$\varphi=\frac{e}{4\pi\varepsilon}\nabla_o\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\vec{d}\quad\cdot\cdot②$$

$$r^2=(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2$$

$$2r\frac{\partial r}{\partial\xi}=2(\xi-x)\qquad\frac{\partial r}{\partial\xi}=\frac{(\xi-x)}{r}\quad\cdot\cdot③$$

$$\nabla_o\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{(\xi-x)}{r^3}\vec{e}_x-\frac{(\eta-y)}{r^3}\vec{e}_y-\frac{(\zeta-z)}{r^3}\vec{e}_z$$

$$\nabla_o\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\left((x-\xi)\vec{e}_x+(y-\eta)\vec{e}_y+(z-\zeta)\vec{e}_z\right)}{r^3}=\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\varphi=\frac{e}{4\pi\varepsilon}\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\vec{d}$$

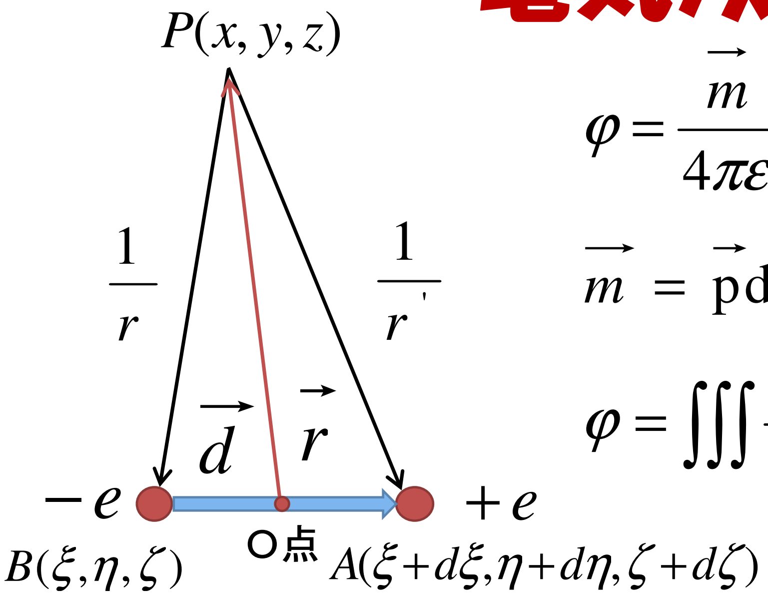
$\vec{m}=e\vec{d}$ とおくと

$$\left[\varphi=\frac{e\vec{d}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon r^3}=\frac{\vec{m}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon r^3}\quad\cdot\cdot④\right]$$

電気双極子が置かれた点Oについての勾配を ∇_o とする。

また　$\nabla_o=-\nabla_P$

電気双極子モーメント(2)



$$\vec{d}=\overrightarrow{BA}=(d\xi,d\eta,d\zeta)$$

$$\varphi=\frac{\vec{m}}{4\pi\varepsilon}\cdot\nabla_o\left(\frac{1}{r}\right)\quad\cdot\cdot①$$

$$\vec{m}=\vec{\mathrm{p}}\mathrm{dV}\quad\cdot\cdot②$$

$$\varphi=\iiint\frac{\vec{\mathrm{p}}}{4\pi\varepsilon}\cdot\nabla_o\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{dV}\quad\cdot\cdot③$$

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int\frac{\vec{\mathrm{p}}\cdot\vec{\mathrm{n}}}{r}dS+\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint\frac{\left(-\nabla_o\cdot\vec{\mathrm{p}}\right)}{r}\mathrm{dV}$$

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int\frac{\vec{\mathrm{p}}\cdot\vec{\mathrm{n}}}{r}dS+\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint\frac{\left(-\mathrm{div}\vec{\mathrm{p}}\right)}{r}\mathrm{dV}\quad\cdot\cdot⑥$$

$$\left[\begin{array}{ll}\text{表面に面積密度} & \vec{\mathrm{p}}\cdot\vec{\mathrm{n}}\\ \text{内部に体積密度} & -\mathrm{div}\,\vec{\mathrm{p}}\end{array}\right]$$

の電荷が分布していることと同じ電位ポテンシャルである。

$$\vec{\mathrm{p}}\cdot\nabla_o\left(\frac{1}{r}\right)=\nabla_o\cdot\left(\frac{\vec{\mathrm{p}}}{r}\right)-\frac{\nabla_o\cdot\vec{\mathrm{p}}}{r}\quad\cdot\cdot④$$

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint\left(\nabla_o\cdot\left(\frac{\vec{\mathrm{p}}}{r}\right)-\frac{\nabla_o\cdot\vec{\mathrm{p}}}{r}\right)\mathrm{dV}\quad\cdot\cdot⑤$$

ガウスの法則（電荷について）

真空中に電荷が存在するとき、その電荷を取り囲む空間の電場に対する表面積分の値は、その閉じた空間内に存在する電気量に比例する。

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint \frac{\rho}{\varepsilon_0} dxdydz \quad \cdots ①$$

電場についての表面積分を体積積分にガウスの法則により変更すると

$$\iiint \mathrm{div}\,\vec{E} \cdot dxdydz = \iiint \frac{\rho}{\varepsilon_0} dxdydz \quad \cdots ②$$

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \cdots ③$$

空間に誘電分極があるときに、分極のモーメントが $\vec{P}$ で表せるときに空間には $-\mathrm{div}\,\vec{P} = \rho'$ の分極電荷が誘起される。

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho - \mathrm{div}\,\vec{P}}{\varepsilon_0} \quad \cdots ④$$

$$\mathrm{div}\left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right) = \rho \quad \cdots ⑤$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \qquad \mathrm{div}\,\vec{D} = \rho \quad \cdots ⑥$$

ガウスの法則（磁荷について）

真空中に磁荷が存在するとき、その磁荷を取り囲む空間の磁場に対する表面積分の値は、その閉じた空間内に存在する磁気量に比例する。

$$\int \vec{H} \cdot d\vec{S} = \iiint \frac{\rho_M}{\mu_0} dxdydz \quad \cdot\cdot ①$$

磁場についての表面積分を体積積分にガウスの法則により変更すると

$$\iiint \mathrm{div}\vec{H} \cdot dxdydz = \iiint \frac{\rho_M}{\mu_0} dxdydz \quad \cdot\cdot ②$$

$$\mathrm{div}\,\vec{H} = \frac{\rho_M}{\mu_0} \quad \cdot\cdot ③$$

空間に誘電分極があるときに、分極のモーメントが $\vec{M}$ で表せるときに空間には $-\mathrm{div}\,\vec{M} = \rho'_M$ の分極磁荷が誘起される。

$$\mathrm{div}\,\vec{H} = \frac{\rho_M - \mathrm{div}\,\vec{M}}{\mu_0} \quad \cdot\cdot ④$$

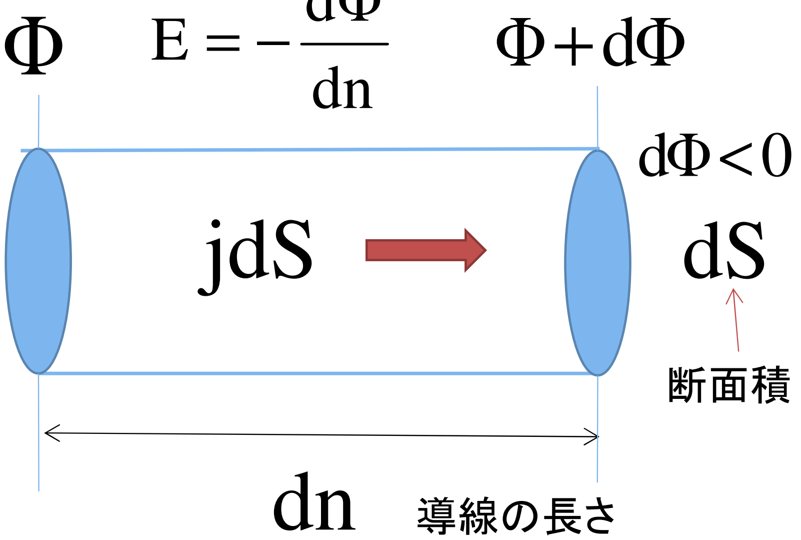
$$\mathrm{div}\left(\mu_0 \vec{H} + \vec{M}\right) = \rho_M \quad \cdot\cdot ⑤$$

真磁荷はないので　$\rho_M = 0$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M} \qquad \mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \quad \cdot\cdot ⑥$$

オーム・ジュールの法則の微分型

$$E = -\frac{d\Phi}{dn}$$



オームの法則の微分型

$$-d\Phi = \rho \frac{dn}{dS} jdS \quad \cdot\cdot①$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{d\Phi}{dn} = j \quad \cdot\cdot②$$

$$\sigma\left(-\frac{d\Phi}{dn}\right) = j$$

$$E = -\frac{d\Phi}{dn}$$ なので

$$\therefore\ \vec{j} = \sigma \vec{E} \quad \cdot\cdot③$$

ジュール熱の微分型

$$dP = jdS(-d\Phi) \quad \cdot\cdot③$$

$$dP = j\left(-\frac{d\Phi}{dn}\right)dSdn \quad \cdot\cdot④$$

$$dP = jEdSdn \quad \cdot\cdot⑤$$

単位体積当たりのジュール熱は

$$\frac{dP}{dSdn} = jE$$

$$\therefore\ u = jE = \sigma \vec{E}^2 \quad \cdot\cdot⑥$$

ファラデーの法則

ファラデーの電磁誘導の法則よりある閉回路の通過する磁束Φの時間変化率が、その周回での起電力になる。次の式で表せる。

$$V = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad \cdot\cdot ①$$

磁束Φは磁束密度ベクトルを用いて表すと

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad \cdot\cdot ②$$

①をベクトル記号を用いると

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad \cdot\cdot ③$$

ストークスの定理を用いると

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int \mathrm{rot}\,\vec{E} \cdot d\vec{S} \quad \cdot\cdot ③$$

$$-\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \int \mathrm{rot}\,\vec{E} \cdot d\vec{S} \quad \cdot\cdot ④$$

$$\int \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \mathrm{rot}\,\vec{E} \right) \cdot d\vec{S} = 0 \quad \cdot\cdot ⑤$$

⑤の関係が常に成り立つには次の関係が成り立つ。

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \mathrm{rot}\,\vec{E} = 0 \qquad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mathrm{rot}\,\vec{E} \quad \cdot\cdot ⑥$$

アンペールの法則

ある閉回路を通過する電流Iの大きさは、その周回での磁場Hの線積分に等しい。
線積分の向きは、電流の流れる向きを右ねじの進行方向とした時の回転の向きを正とする。

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{s} = I \quad \cdot\cdot①$$

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{s} = \int \vec{j}\cdot d\vec{S} \quad \cdot\cdot②$$

$$\int \mathrm{rot}\,\vec{H}\cdot d\vec{S} = \int \vec{j}\cdot d\vec{S} \quad \cdot\cdot③$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j} \quad \cdot\cdot④$$

$$\mathrm{div}\left(\mathrm{rot}\,\vec{H}\right) = \mathrm{div}\,\vec{j} = 0 \quad \cdot\cdot⑤$$

となるが、

空間に真電荷が存在するときの電気量保存の関係から

$$\mathrm{div}\,\vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial\,\mathrm{div}\,\vec{D}}{\partial t} = -\mathrm{div}\,\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \cdot\cdot⑥$$

$$\therefore \quad \mathrm{div}\left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) = 0 \quad \cdot\cdot⑦$$

電荷の時間変化も電流を生み出すことになり変位電流という。

$$\vec{j}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \cdot\cdot⑧$$

変位電流密度まで含めた④式は

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \cdot\cdot⑨$$

マックスウェルの電磁方程式

Maxwell's electromagnetic equations

以下の4つの式が電磁気現象を説明する基礎となる方程式である。

マックスウェルが数学的にまとめ上げた理論式（1864年）である。

$$\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho \quad \cdots ①$$

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \quad \cdots ②$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \cdots ③$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mathrm{rot}\,\vec{E} \quad \cdots ④$$

ただし $\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$

電磁波の方程式(1)

真電荷の存在しない空間内においては、J=0、ρ=0と仮定すると

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \cdot\cdot①$$

$$\mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}\,\vec{H}\right) = \varepsilon\,\mathrm{rot}\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

$$\nabla\left(\nabla\cdot\vec{H}\right) - \nabla^2\vec{H} = \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\vec{E}$$

$$-\nabla^2\vec{H} = -\varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\nabla^2\vec{H} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} \quad \cdot\cdot②$$

$$-\mu\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,\vec{E} \quad \cdot\cdot③$$

$$-\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{rot}\,\vec{H}\right) = \mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}\,\vec{E}\right)$$

$$-\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = \mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}\,\vec{E}\right)$$

$$-\mu\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = \nabla\left(\nabla\cdot\vec{E}\right) - \nabla^2\vec{E}$$

$$-\mu\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = -\nabla^2\vec{E}$$

$$\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \nabla^2\vec{E} \quad \cdot\cdot④$$

$$\mu\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\mathrm{rot}\,\vec{E}$$

$$\vec{j}=0 \qquad \mathrm{rot}\,\vec{H} = \varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\mathrm{div}\vec{E} = 0 \qquad \vec{D} = \varepsilon\vec{E}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{H} = 0 \qquad \vec{B} = \mu\vec{H}$$

電磁波の方程式(2)

真電荷の存在しない空間内においては、J=0、ρ=0と仮定すると

$$\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{\mathrm{H}}}{\partial t^2}=\nabla^2\vec{\mathrm{H}} \quad \cdot\cdot① \qquad \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{\mathrm{E}}}{\partial t^2}=\nabla^2\vec{\mathrm{E}} \quad \cdot\cdot②$$

電磁波に関する波動方程式になる。

電磁波の方程式(3)

真電荷の存在しない空間内においては、J=0、ρ=0と仮定すると

$$\vec{k} = k\vec{n} \quad \vec{k}\cdot\vec{r} = k\vec{n}\cdot\vec{r} = kr_0 = k_x x + k_y y + k_z z$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) \quad \cdot\cdot④$$

と電場の式をおくと

$$\nabla^2\vec{E} = \vec{E}_0\nabla^2 \sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) = -k^2\vec{E}_0 \sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) \quad \cdot\cdot⑤$$

$$\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = -\mu\varepsilon\omega^2\vec{E}_0 \sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) \quad \cdot\cdot⑥$$

$$\mu\varepsilon\omega^2\vec{E}_0 \sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) = k^2\vec{E}_0 \sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) \quad \cdot\cdot⑦$$

$$\mu\varepsilon\omega^2 = k^2 \quad \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{\mu\varepsilon} \quad \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad \cdot\cdot⑧$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(\omega t - kr_0) = \vec{E}_0 \sin\omega\left(t - \frac{r_0}{\frac{\omega}{k}}\right) \quad \cdot\cdot⑨$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(\omega t - kr_0) = \vec{E}_0 \sin\omega\left(t - \frac{r_0}{v}\right) \quad \cdot\cdot⑩$$

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad \cdot\cdot⑪ \quad t_0 = \frac{r_0}{v} \longrightarrow$$ 波面到着までの時間

⑩式は、原点Oの電場 $\vec{E} = \vec{E}_0 \sin\omega t$ の振動が速度vで空間を伝搬してくることを示している。

マックスウェルの方程式から

$$\nabla\cdot\vec{E} = \nabla\cdot\vec{E}_0 \sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) + \vec{E}_0\cdot\nabla \sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) = 0$$

$$\nabla\cdot\vec{E} = \vec{E}_0\cdot\nabla \sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) = 0 \quad \cdot\cdot⑫$$

電磁波の方程式(4)

$$\nabla \sin(\omega t - \vec{\mathrm{k}} \cdot \vec{r})$$

$$= \left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \sin(\omega t - \vec{\mathrm{k}} \cdot \vec{r})$$

$$= -\left(k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z \right) \cos(\omega t - \vec{\mathrm{k}} \cdot \vec{r})$$

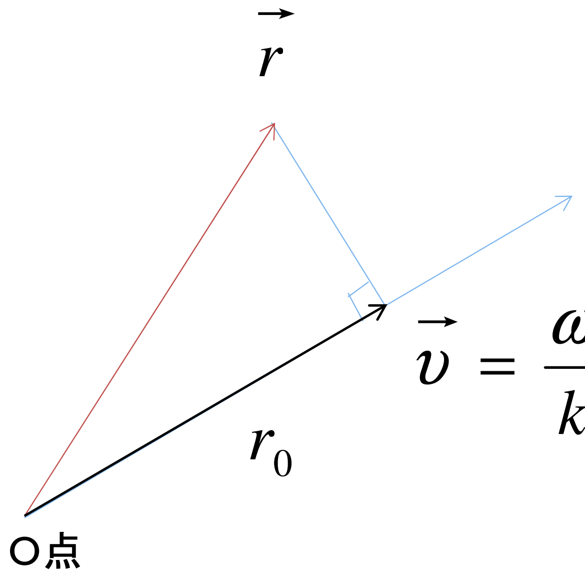
$$= -\vec{\mathrm{k}} \cos(\omega t - \vec{\mathrm{k}} \cdot \vec{r})$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathrm{E}} = -\vec{\mathrm{E}}_0 \cdot \vec{\mathrm{k}} \cos(\omega t - \vec{\mathrm{k}} \cdot \vec{r}) = 0 \quad \cdot\cdot⑬$$

$$\vec{\mathrm{H}} = \vec{\mathrm{H}}_0 \sin(\omega t - \vec{\mathrm{k}} \cdot \vec{r})$$ も同様に

$$\nabla \cdot \vec{\mathrm{H}} = -\vec{\mathrm{H}}_0 \cdot \vec{\mathrm{k}} \cos(\omega t - \vec{\mathrm{k}} \cdot \vec{r}) = 0 \quad \cdot\cdot⑭$$

$$\vec{\mathrm{E}}_0 \cdot \vec{\mathrm{k}} = 0 \qquad \vec{\mathrm{H}}_0 \cdot \vec{\mathrm{k}} = 0 \quad \cdot\cdot⑮$$



$$\vec{n} = \frac{\vec{\mathrm{k}}}{k}$$

$$\vec{v} = \frac{\omega}{k}\vec{n} = \frac{\omega}{k^2}\vec{\mathrm{k}}$$

⑮から電場Eも磁場Hも平面波の進行方向Kに垂直に振動する。

電磁波の方程式(5)

$$\mu\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\mathrm{rot}\,\vec{E} \quad \cdot\cdot ⑯$$

$$\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{H}_0 \sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})\right) = -\mathrm{rot}\left(\vec{E}_0 \sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})\right)$$

$$-\mu\omega\vec{H}_0 \cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) = \nabla\times\left(\vec{E}_0 \sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})\right) \quad \cdot\cdot ⑰$$

$$\nabla\times\left(\vec{E}_0 \sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})\right) = \sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})\left(\nabla\times\vec{E}_0\right) + \left(\nabla \sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})\right)\times\vec{E}_0 \quad \cdot\cdot ⑱$$

$$\nabla\times\left(\vec{E}_0 \sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})\right) = -\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})\vec{k}\times\vec{E}_0 \quad \cdot\cdot ⑲$$

⑰と⑲より

$$-\mu\omega\vec{H}_0 \cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) = -\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})\vec{k}\times\vec{E}_0$$

$$\mu\omega\vec{H}_0 = \vec{k}\times\vec{E}_0 \quad \cdot\cdot ⑳$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\left(\vec{H}_0 \sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})\right) = \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}_0 \sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})$$

$$\nabla\times\left(\vec{H}_0 \sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})\right) = \varepsilon\omega\vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})$$

$$\nabla\times\left(\vec{H}_0 \sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})\right) = \sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})\left(\nabla\times\vec{H}_0\right) + \left(\nabla \sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})\right)\times\vec{H}_0$$

$$\nabla\times\left(\vec{H}_0 \sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})\right) = \left(\nabla \sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})\right)\times\vec{H}_0$$

$$\nabla\times\left(\vec{H}_0 \sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})\right) = -\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})\vec{k}\times\vec{H}_0$$

$$\varepsilon\omega\vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) = -\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})\vec{k}\times\vec{H}_0$$

$$\varepsilon\omega\vec{E}_0 = -\vec{k}\times\vec{H}_0 = \vec{H}_0\times\vec{k}$$

電磁波の方程式(6)

$$\mu\omega\vec{H}_0=\vec{k}\times\vec{E}_0 \quad \cdots ①$$

$$\varepsilon\omega\vec{E}_0=-\vec{k}\times\vec{H}_0 \quad \cdots ②$$

$$\vec{E}_0\cdot\vec{k}=0 \qquad \vec{H}_0\cdot\vec{k}=0 \quad \cdots ③$$

③の関係式からEもHもともにKに垂直なので

$$\mu\omega H_0=k\cdot E_0$$

$$\varepsilon\omega E_0=k\cdot H_0$$

$$\frac{\varepsilon\omega E_0}{\mu\omega H_0}=\frac{k\cdot H_0}{k\cdot E_0}$$

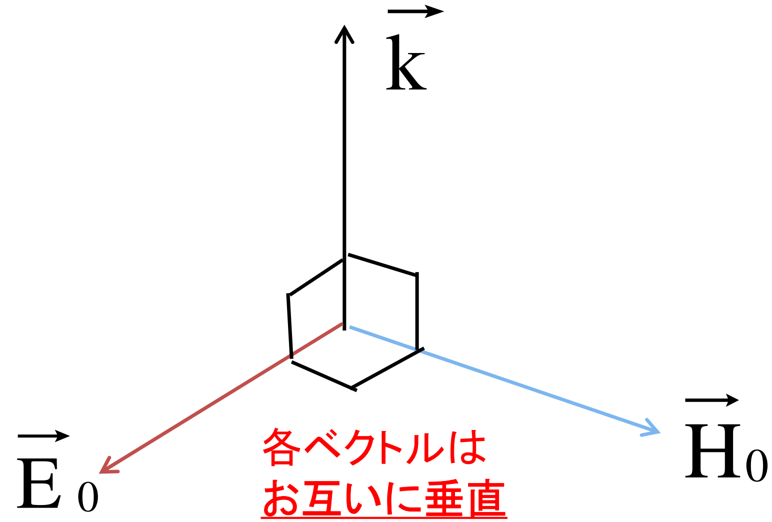
$$\frac{\varepsilon}{\mu}=\left(\frac{H_0}{E_0}\right)^2$$

$$\frac{H_0}{E_0}=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \quad \cdots ④$$

$$\mu\omega\vec{H}_0=\vec{k}\times\vec{E}_0 \quad \cdots ①$$

$$\mu\omega\vec{E}_0\cdot\vec{H}_0=\vec{E}_0\cdot\left(\vec{k}\times\vec{E}_0\right) \quad \cdots ⑤$$

$$\mu\omega\vec{E}_0\cdot\vec{H}_0=\vec{k}\cdot\left(\vec{E}_0\times\vec{E}_0\right)=0 \quad \cdots ⑥$$



$$\therefore\ \vec{E}_0\cdot\vec{H}_0=0 \quad \cdots ⑦$$

$$\vec{E}_0\perp\vec{H}_0$$

ベクトルポテンシャルの導出(1)

磁場Hが、電場と同様に磁場ポテンシャルから導かれるものと仮定すると

$$\vec{\mathrm{H}} = -\nabla \Phi_m \quad \cdot\cdot①$$

$$\mathrm{rot}\vec{\mathrm{H}} = \nabla\times\vec{\mathrm{H}} = \nabla\times(-\nabla\Phi_m)$$
$$= -\nabla\times(\nabla\Phi_m) = 0 \neq \vec{\mathrm{j}} \quad \cdot\cdot②$$

$\therefore \quad \mathrm{rot}\ \vec{\mathrm{H}} = \vec{\mathrm{j}}$ の関係を満たさない。

ベクトルの回転から導けるものと仮定する

$$\vec{\mathrm{B}} = \mu\vec{\mathrm{H}} = \mathrm{rot}\vec{\mathrm{A}} \quad \cdot\cdot③$$

$$\mathrm{div}\vec{\mathrm{B}} = \mathrm{div}\left(\mathrm{rot}\vec{\mathrm{A}}\right) = 0 \quad \cdot\cdot④$$

$\vec{\mathrm{A}}' = \vec{\mathrm{A}} + grad\ \varphi$ とおいても

$$\mathrm{rot}\ \vec{\mathrm{A}}' = \mathrm{rot}\ \vec{\mathrm{A}} + \mathrm{rot}\left(grad\ \varphi\right) = \mathrm{rot}\ \vec{\mathrm{A}} \quad \cdot\cdot⑤$$

同じ回転(渦)の値となるので自由度がある

$$\nabla\cdot\vec{\mathrm{A}}' = \nabla\cdot\left(\vec{\mathrm{A}} + grad\ \varphi\right) = \nabla\cdot\vec{\mathrm{A}} + \nabla\cdot\left(grad\ \varphi\right)$$

$$\nabla\times\vec{\mathrm{B}} = \nabla\times\mathrm{rot}\vec{\mathrm{A}} = \nabla\times\left(\nabla\times\vec{\mathrm{A}}\right) = \nabla\left(\nabla\cdot\vec{\mathrm{A}}\right) - \nabla^2\vec{\mathrm{A}}$$
$$= \mu\vec{\mathrm{j}} \quad \cdot\cdot⑥$$

$\nabla\cdot\vec{\mathrm{A}} = 0$ の条件を付けると $-\nabla^2\vec{\mathrm{A}} = \mu\vec{\mathrm{j}} \quad \cdot\cdot⑦$

$\nabla^2\vec{\mathrm{A}} = -\mu\vec{\mathrm{j}}$ 各成分ごとに表すと

$$\nabla^2 \mathrm{A}_x = -\mu \mathrm{j}_x \quad \nabla^2 \mathrm{A}_y = -\mu \mathrm{j}_y \quad \nabla^2 \mathrm{A}_z = -\mu \mathrm{j}_z \quad \cdot\cdot⑧$$

ベクトルポテンシャルの導出(2)

$$\nabla^2\varphi(\vec{r}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \cdots ① \quad \varphi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|} d^3\vec{r}'$$

$\dfrac{\rho}{\varepsilon_0} = \mu \mathrm{j}_x$ と比較すると

$$\nabla^2 \mathrm{A}_x = -\mu \mathrm{j}_x \cdots ② \quad \mathrm{A}_x(\vec{r}) = \int \frac{\mu \mathrm{j}_x}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|} d^3\vec{r}'$$

$$\nabla^2 \mathrm{A}_y = -\mu \mathrm{j}_y \quad \nabla^2 \mathrm{A}_z = -\mu \mathrm{j}_z$$

も同様に扱えるので ∴

$$\nabla^2 \vec{\mathrm{A}} = -\mu \vec{\mathrm{j}} \Rightarrow \vec{\mathrm{A}}(\vec{r}) = \int \frac{\mu \vec{\mathrm{j}}}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|} d^3\vec{r}' \cdots ③$$

$$\vec{\mathrm{j}} \cdot \mathrm{d}^3\vec{\mathrm{r}}' = \mathrm{j}\vec{\mathrm{n}}\mathrm{dS} \cdot \mathrm{ds} = \mathrm{jdS} \cdot \vec{\mathrm{n}}\mathrm{ds} = \mathrm{Jd}\vec{\mathrm{s}}$$

$$\vec{\mathrm{A}}(\vec{r}) = \int \frac{\mu \mathrm{J}\mathrm{d}\vec{\mathrm{s}}}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|} \cdots ④$$

$$\mathrm{rot}\vec{\mathrm{A}}(\vec{r}) = \nabla\times\mathrm{rot}\vec{\mathrm{A}}(\vec{r}) = \frac{\mu \mathrm{J}}{4\pi}\int \nabla\times\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{s}}}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}$$

$$\vec{\mathrm{B}} = \frac{\mu \mathrm{J}}{4\pi}\int\left(\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}\nabla\times\mathrm{d}\vec{\mathrm{s}} + \nabla\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}\times\mathrm{d}\vec{\mathrm{s}}\right) \cdots ⑤$$

ベクトルポテンシャルの導出（3）

$$\vec{B}=\frac{\mu J}{4\pi}\int\left(\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}\nabla\times d\vec{s}+\nabla\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}\times d\vec{s}\right)\quad\cdot\cdot⑤$$

$$\nabla\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}=-\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^2}\cdot\frac{\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}=-\frac{\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}$$

$$\vec{B}=\frac{\mu J}{4\pi}\int\frac{-\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}\times d\vec{s}=\frac{\mu J}{4\pi}\int\frac{d\vec{s}\times\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}\quad\cdot\cdot⑥$$

$$\vec{H}=\frac{J}{4\pi}\int\frac{d\vec{s}\times\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}\quad\cdot\cdot⑦$$

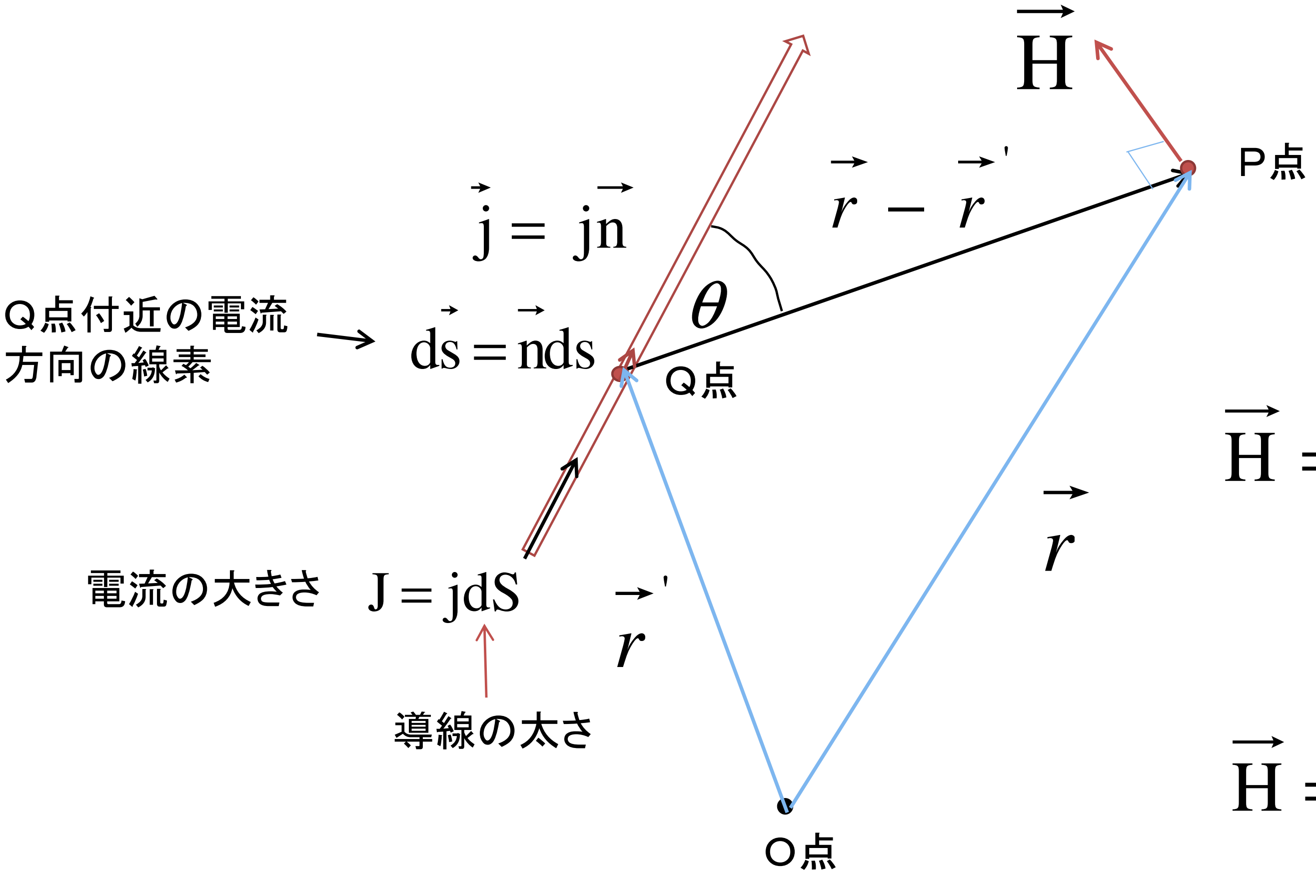
定常電流が作る磁場を表す式である。

ビオ・サバールの法則

$$\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|=l$$ 電流素からP点までの距離

$$\vec{H}=\frac{1}{4\pi}\int\frac{J ds\sin\theta}{l^2}\quad\cdot\cdot⑧$$

ビオ・サバールの法則



$$l = \left|\vec{r}-\vec{r}'\right|$$

$$\vec{H} = \frac{J}{4\pi}\int \frac{d\vec{s}\times\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^{3}} \quad \cdot\cdot ⑦$$

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{J ds \sin\theta}{l^{2}} \quad \cdot\cdot ⑧$$

ベクトルポテンシャルの展開（１）

マックスウェルの方程式から

$$\mathrm{div}\,\vec{\mathrm{B}} = 0 \quad \cdots ①$$

$$\frac{\partial \vec{\mathrm{B}}}{\partial t} = -\mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{E}} \quad \cdots ②$$

磁束密度BがベクトルAの回転から導けると仮定する。

$$\vec{\mathrm{B}} = \mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{A}} \quad \cdots ③$$

ベクトルAの渦（回転）の発散は常に0である。

$$\mathrm{div}\left(\mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{A}}\right) = \mathrm{div}\,\vec{\mathrm{B}} = 0 \quad \cdots ④$$

従って、マックスウェルの方程式の関係を満たす磁束密度Bを導けることになる。

③を②に代入する。

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{A}} = \mathrm{rot}\,\frac{\partial \vec{\mathrm{A}}}{\partial t} = -\mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{E}}$$

$$\mathrm{rot}\left(\frac{\partial \vec{\mathrm{A}}}{\partial t} + \vec{\mathrm{E}}\right) = 0 \quad \cdots ⑤$$

$$\mathrm{rot}\left(-\nabla \varphi\right) = 0 \quad \cdots ⑥$$

は常に成り立つので

$$\frac{\partial \vec{\mathrm{A}}}{\partial t} + \vec{\mathrm{E}} = -\nabla \varphi$$

$$\vec{\mathrm{E}} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{\mathrm{A}}}{\partial t} \quad \cdots ⑦$$

ベクトルポテンシャルの展開(2)

$$\vec{A}+\nabla f \quad \cdot\cdot ⑧ \qquad \varphi-\frac{\partial f}{\partial t} \quad \cdot\cdot ⑨$$

とAとφを書き換えて前ページ⑦に代入する。

$$-\nabla\left(\varphi-\frac{\partial f}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{A}+\nabla f\right) \quad \cdot\cdot ⑩$$

$$-\nabla\varphi+\frac{\partial}{\partial t}(\nabla f)-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla f) \quad \cdot\cdot ⑪$$

$$-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=\vec{E} \quad \cdot\cdot ⑫$$

となり同じEを結果的に導くことになる。

$$\mathrm{rot}\left(\vec{A}+\nabla f\right)=\mathrm{rot}\,\vec{A}+\mathrm{rot}\,\nabla f=\mathrm{rot}\,\vec{A} \quad \cdot\cdot ⑬$$

従ってベクトルポテンシャルには自由度がある。

$$\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\mathrm{rot}\,\vec{H}-\vec{j} \qquad \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\vec{B}-\vec{j} \quad \cdot\cdot ⑭$$

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}\,\vec{A}\right)-\vec{j}$$

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=\frac{1}{\mu}\left(\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)-\nabla^2\vec{A}\right)-\vec{j}$$

$$\cdot\cdot ⑮$$

ベクトルポテンシャルの展開(3)

$$\varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=\left(\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)-\nabla^2\vec{A}\right)-\mu\vec{j}$$

$$\nabla^2\vec{A}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)+\nabla\varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\mu\vec{j}$$

$$\nabla^2\vec{A}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)-\mu\vec{j}\quad\cdots⑯$$

$\nabla\cdot\vec{A}+\varepsilon\mu\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}=0$ ならば ··⑰

$$\nabla^2\vec{A}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu\vec{j}\quad\cdots⑱$$

$$\mathrm{div}\,\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon}\qquad\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon}\quad\cdots⑲$$

$$\nabla\left(-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$-\nabla\cdot(\nabla\varphi)-\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\vec{A}=\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$\nabla\cdot\vec{A}=-\varepsilon\mu\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$ ⑰の式を用いると

$$-\nabla^2\varphi+\varepsilon\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\frac{\rho}{\varepsilon}$$

ベクトルポテンシャルの展開(４)

$$\nabla \cdot \vec{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$ ならば ‥⑰

ローレンツの条件式

$$\nabla^2 \vec{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{j}$$ ‥⑱

$$\nabla^2 \varphi - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$ ‥⑳

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \qquad \varepsilon\mu = \frac{1}{c^2}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{A} = \mu \vec{j}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \nabla^2 \varphi = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\square = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$ とおけば

$$\square \vec{A} = \mu \vec{j} \qquad \square \varphi = \frac{\rho}{\varepsilon}$$