

ベクトル入門

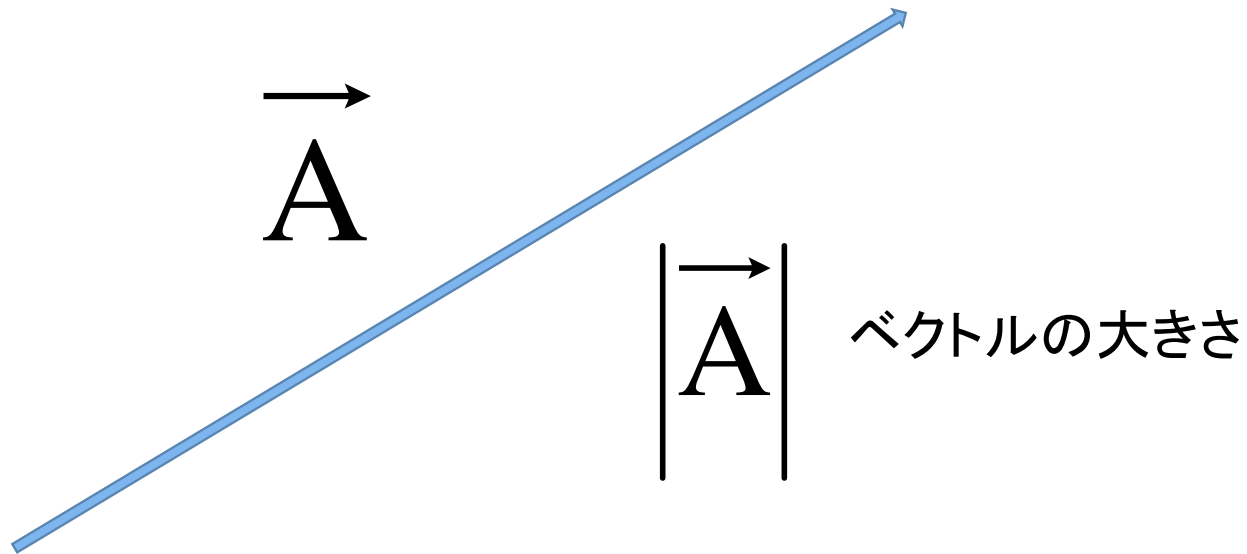
2022.10.30

鹿児島現代物理勉強会

御領 悟志

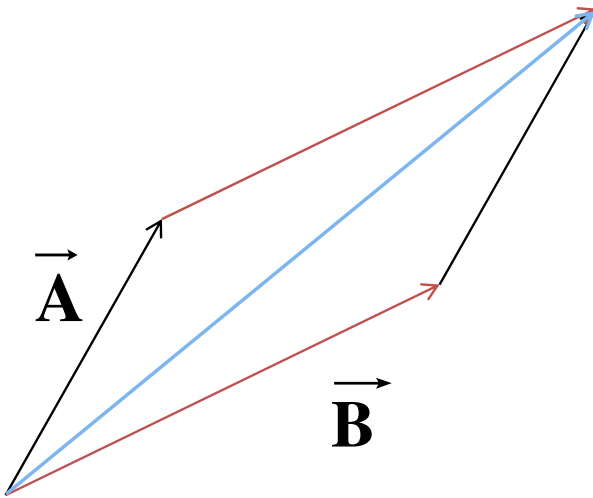
ベクトル (Vector)

力のように大きさと向きをもち矢印で表せる量をベクトルという。



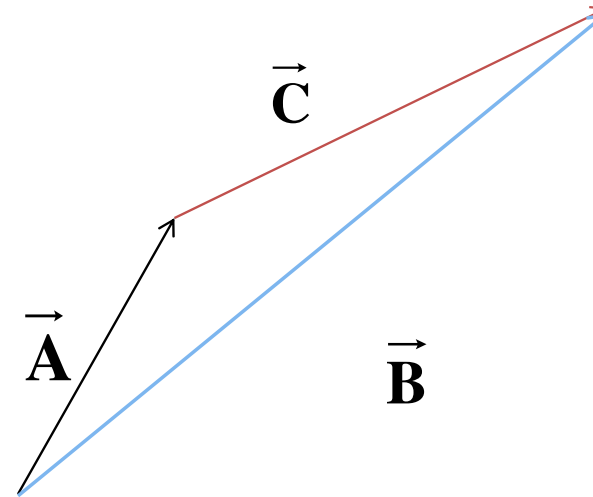
ベクトルの和と差

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$



二つのベクトルを隣り合う2辺と平行四辺形を描きその対角線がベクトルの和を表す。

$$\vec{C} = \vec{B} - \vec{A}$$



ベクトルAにベクトルCを加えてベクトルBになるとき、ベクトルCをベクトルAとBの差という。

位置ベクトル

空間の一点Pは、原点Oからの距離と向きにより定まる。
この空間の一点を定める大きさと向きを持つベクトル量を
位置ベクトルという。

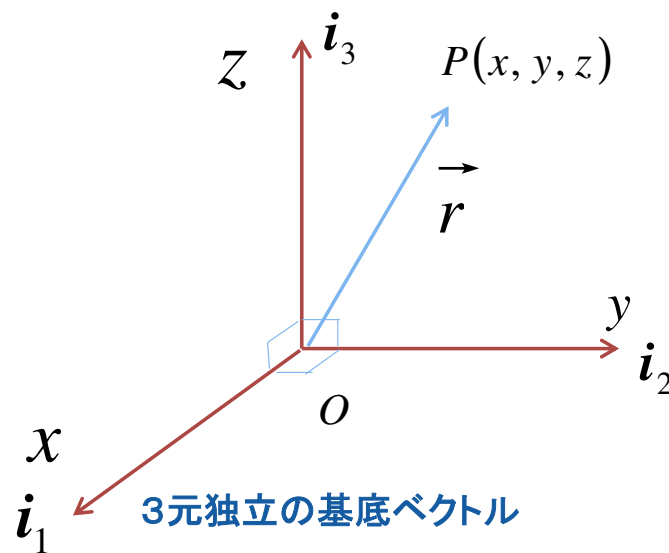
位置ベクトル $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$

3元独立の基底ベクトルを用いて位置ベクトルを表すと次のようになる。

$$\vec{r} = x \mathbf{i}_1 + y \mathbf{i}_2 + z \mathbf{i}_3 \dots \textcircled{1}$$

このように x 、 y 、 z の3つの数の組み合わせで、空間の1点Pが定まる。この組み合わせを**空間座標**といい、次のように表す。

$$P(x, y, z)$$



変位ベクトル

空間の点Pから点Qまで位置ベクトルが変化したとする。
この位置の変化を**変位**といい、点Pから点Qまで引いた矢印のことを**変位ベクトル**という。変位ベクトルは、位置ベクトルの差で表せる。

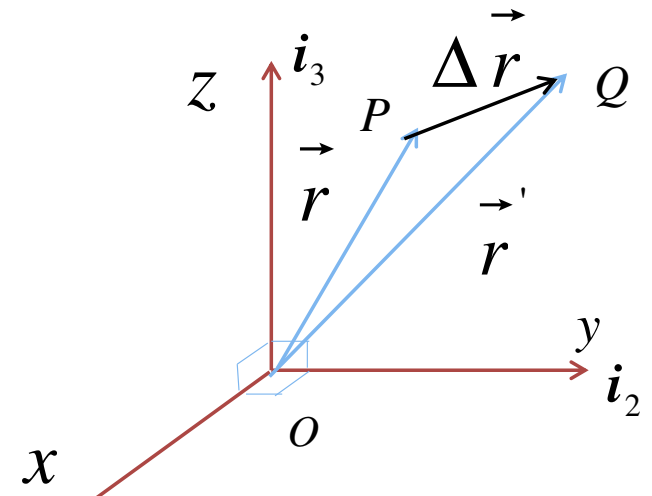
$$\begin{array}{ccc} \text{点Pの位置ベクトル} & \vec{r} & \text{点Qの位置ベクトル} & \vec{r}' \\ P(x, y, z) & & Q(x', y', z') & \end{array}$$

$$\text{点Pから点Qへの変位ベクトル} \quad \Delta \vec{r} = \vec{r}' - \vec{r} \quad \cdots \textcircled{2} \quad \vec{i}_1 \quad \text{3元独立の基底ベクトル}$$

$$\Delta \vec{r} = (x' - x)\vec{i}_1 + (y' - y)\vec{i}_2 + (z' - z)\vec{i}_3 \quad \cdots \textcircled{3}$$

3元独立の基底ベクトルを用いて③の変位ベクトルを表すと次のようになる。

$$\Delta \vec{r} = \Delta x \vec{i}_1 + \Delta y \vec{i}_2 + \Delta z \vec{i}_3 \quad \cdots \textcircled{4}$$

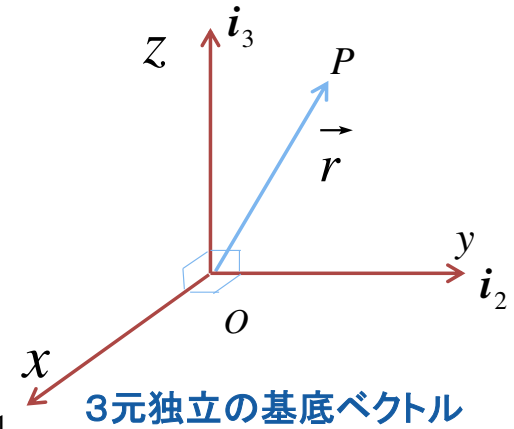


速度・加速度ベクトル

位置ベクトルの時間微分をするとき、基底ベクトルは時間的に変化しないものとする

$$\frac{d\mathbf{i}_1}{dt} = \mathbf{0} \quad \frac{d\mathbf{i}_2}{dt} = \mathbf{0} \quad \frac{d\mathbf{i}_3}{dt} = \mathbf{0} \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i}_1 + \frac{dy}{dt}\mathbf{i}_2 + \frac{dz}{dt}\mathbf{i}_3 + x\frac{d\mathbf{i}_1}{dt} + y\frac{d\mathbf{i}_2}{dt} + z\frac{d\mathbf{i}_3}{dt}$$



単位時間あたりの位置の変化を表す量を、**速度ベクトル**という。

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i}_1 + \frac{dy}{dt}\mathbf{i}_2 + \frac{dz}{dt}\mathbf{i}_3 \quad \dots \textcircled{5}$$

もう一度時間微分すると**加速度ベクトル**になる

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i}_1 + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{i}_2 + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{i}_3 \quad \dots \textcircled{6}$$

ベクトルの内積

ベクトルの演算 ~ 演算後の量はスカラーに正負の符号をつけた値になる

$$\mathbf{A} = A_1 \mathbf{i}_1 + A_2 \mathbf{i}_2 + A_3 \mathbf{i}_3$$

$$\mathbf{B} = B_1 \mathbf{i}_1 + B_2 \mathbf{i}_2 + B_3 \mathbf{i}_3$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos (\angle \mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= |\mathbf{A}| |\mathbf{B} + \mathbf{C}| \cos (\angle \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C})) \\ &= |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos (\angle \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) + |\mathbf{A}| |\mathbf{C}| \cos (\angle \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \end{aligned}$$

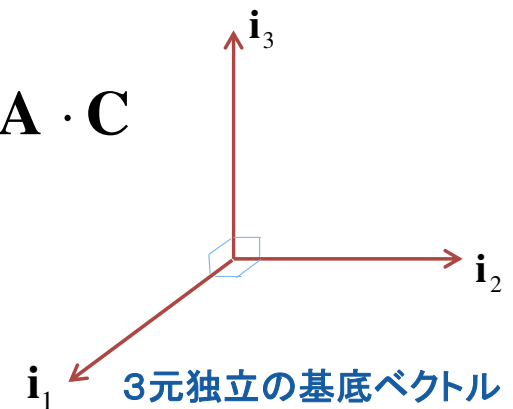
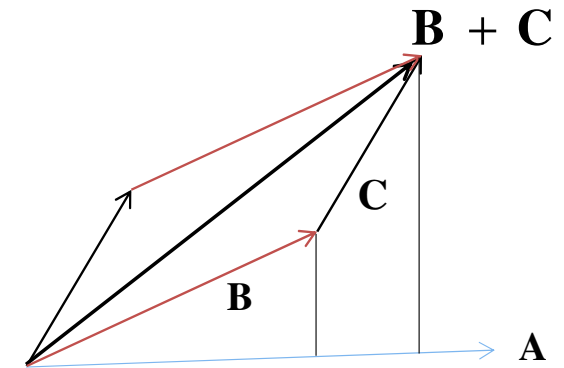
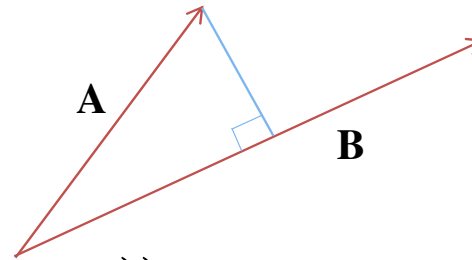
$$\mathbf{i}_i \cdot \mathbf{i}_j = 0 \quad (i \neq j)$$

$$\mathbf{i}_i \cdot \mathbf{i}_j = 1 \quad (i = j)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (A_1 \mathbf{i}_1 + A_2 \mathbf{i}_2 + A_3 \mathbf{i}_3) (B_1 \mathbf{i}_1 + B_2 \mathbf{i}_2 + B_3 \mathbf{i}_3)$$

$$= A_1 B_1 \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + A_1 B_2 \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 + A_1 B_3 \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_3 + A_2 B_1 \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_1 + A_2 B_2 \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 + A_2 B_3 \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3 + A_3 B_1 \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_1 + A_3 B_2 \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_2 + A_3 B_3 \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$$



3元独立の基底ベクトル

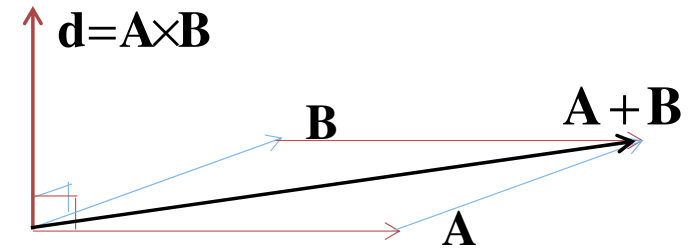
ベクトルの外積 (1)

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

演算後の量もベクトルである

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \frac{\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|} \quad \mathbf{d} \text{ は } \mathbf{A} \text{ と } \mathbf{B} \text{ 両方に垂直}$$

$\mathbf{d}$ の向きはAからBに右ねじを回したとき、右ねじが進行する向き



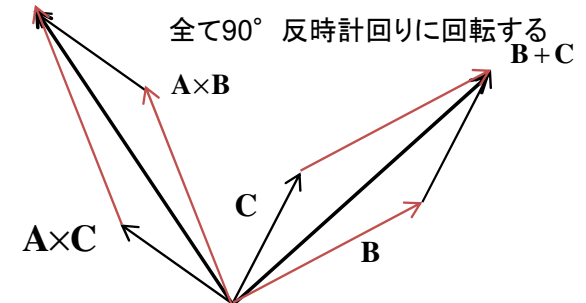
$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{d}_1 + |\mathbf{A}| |\mathbf{C}| \sin (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{d}_2 = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$$

$$\mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_3 \quad \mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_3 = \mathbf{i}_1 \quad \mathbf{i}_3 \times \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2 \quad \mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_1 = -\mathbf{i}_3 \quad \mathbf{i}_3 \times \mathbf{i}_2 = -\mathbf{i}_1 \quad \mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_3 = -\mathbf{i}_2$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_1 \mathbf{i}_1 + A_2 \mathbf{i}_2 + A_3 \mathbf{i}_3) \times (B_1 \mathbf{i}_1 + B_2 \mathbf{i}_2 + B_3 \mathbf{i}_3) \\ &= A_1 B_1 \mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_1 + A_1 B_2 \mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_2 + A_1 B_3 \mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_3 + A_2 B_1 \mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_1 + A_2 B_2 \mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_2 + A_2 B_3 \mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_3 \\ &\quad + A_3 B_1 \mathbf{i}_3 \times \mathbf{i}_1 + A_3 B_2 \mathbf{i}_3 \times \mathbf{i}_2 + A_3 B_3 \mathbf{i}_3 \times \mathbf{i}_3 \\ &= A_1 B_2 \mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_2 + A_1 B_3 \mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_3 + A_2 B_1 \mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_1 + A_2 B_3 \mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_3 + A_3 B_1 \mathbf{i}_3 \times \mathbf{i}_1 + A_3 B_2 \mathbf{i}_3 \times \mathbf{i}_2 \\ &= A_1 B_2 \mathbf{i}_3 + A_1 B_3 (-\mathbf{i}_2) + A_2 B_1 (-\mathbf{i}_3) + A_2 B_3 \mathbf{i}_1 + A_3 B_1 \mathbf{i}_2 + A_3 B_2 (-\mathbf{i}_1) \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_2 B_3 - A_3 B_2) \mathbf{i}_1 + (A_3 B_1 - A_1 B_3) \mathbf{i}_2 + (A_1 B_2 - A_2 B_1) \mathbf{i}_3$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$$



$\mathbf{A}$ は $\mathbf{B} + \mathbf{C}$ の平面に垂直とする

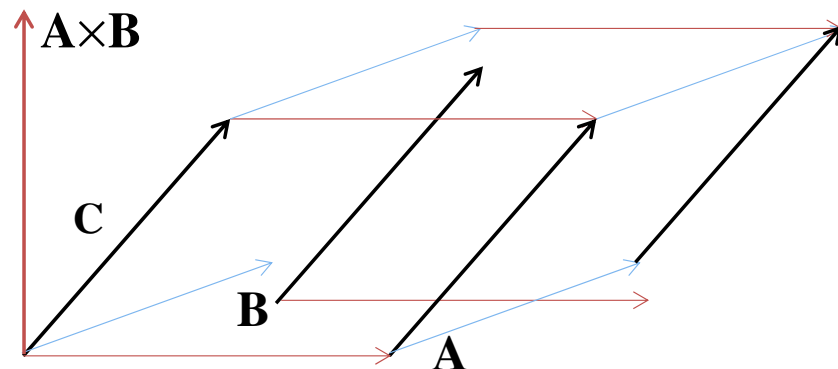
ベクトルの外積 (2)

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_2 B_3 - A_3 B_2) \mathbf{i}_1 + (A_3 B_1 - A_1 B_3) \mathbf{i}_2 + (A_1 B_2 - A_2 B_1) \mathbf{i}_3$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix} \mathbf{i}_1 + \begin{vmatrix} A_3 & A_1 \\ B_3 & B_1 \end{vmatrix} \mathbf{i}_2 + \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \mathbf{i}_3$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

外積が、行列式を用いて表せる。



ベクトルの三重積～ 平行六面体の体積を求めることに等しい

$$\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (C_1 \mathbf{i}_1 + C_2 \mathbf{i}_2 + C_3 \mathbf{i}_3) \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = C_1 \begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix} - C_2 \begin{vmatrix} A_1 & A_3 \\ B_1 & B_3 \end{vmatrix} + C_3 \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

ベクトル演算の公式(1)

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$$

$$\left[\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \right]_x = \left[A_y (\vec{B} \times \vec{C})_z - A_z (\vec{B} \times \vec{C})_y \right] = \left[A_y (B_x C_y - B_y C_x) - A_z (B_z C_x - B_x C_z) \right]$$

$$= \left[A_y B_x C_y - A_y B_y C_x - A_z B_z C_x + A_z B_x C_z \right]$$

$$= \left[A_x B_x C_x + A_y B_x C_y + A_z B_x C_z - A_x B_x C_x - A_y B_y C_x - A_z B_z C_x \right]$$

$$= \left[B_x (C_x A_x + C_y A_y + C_z A_z) - C_x (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z) \right]$$

$$= \left[B_x (\vec{C} \cdot \vec{A}) - C_x (\vec{A} \cdot \vec{B}) \right] \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\left[\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \right]_y = \left[B_y (\vec{C} \cdot \vec{A}) - C_y (\vec{A} \cdot \vec{B}) \right] \quad \cdots \textcircled{2} \quad \left[\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \right]_z = \left[B_z (\vec{C} \cdot \vec{A}) - C_z (\vec{A} \cdot \vec{B}) \right] \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\therefore \textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{3} \text{をまとめると} \quad \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{C} \cdot \vec{A}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C} \quad \cdots \textcircled{4}$$

ベクトルの微分(1)

ベクトルについての時間変化率について考察する

$m \vec{A}$ の時間微分について考える

ここで m は実数とする。

$$\begin{aligned} d(m\vec{A}) &= (m + dm)(\vec{A} + d\vec{A}) - m\vec{A} \\ &= m\vec{A} + md\vec{A} + dm\vec{A} + dmd\vec{A} - m\vec{A} \\ &\approx md\vec{A} + dm\vec{A} + dmd\vec{A} \end{aligned}$$

$$\frac{d(m\vec{A})}{dt} = m \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{dm}{dt} \vec{A} + \frac{dm}{dt} d\vec{A}$$

$dm \rightarrow 0$ $d\vec{A} \rightarrow 0$ $dt \rightarrow 0$ なので

$$\frac{d(m\vec{A})}{dt} = m \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{dm}{dt} \vec{A} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$\vec{A} \cdot \vec{B}$ の時間微分について考える

$$\begin{aligned} d(\vec{A} \cdot \vec{B}) &= (\vec{A} + d\vec{A})(\vec{B} + d\vec{B}) - \vec{A} \cdot \vec{B} \\ &= \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot d\vec{B} + d\vec{A} \cdot \vec{B} + d\vec{A} \cdot d\vec{B} - \vec{A} \cdot \vec{B} \\ &= \vec{A} \cdot d\vec{B} + d\vec{A} \cdot \vec{B} + d\vec{A} \cdot d\vec{B} \end{aligned}$$

$$\frac{d(\vec{A} \cdot \vec{B})}{dt} = \vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt} + \frac{d\vec{A}}{dt} \cdot \vec{B} + \frac{d\vec{A}}{dt} \cdot d\vec{B}$$

$d\vec{A} \rightarrow 0$ $d\vec{B} \rightarrow 0$ $dt \rightarrow 0$ なので

$$\frac{d(\vec{A} \cdot \vec{B})}{dt} = \vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt} + \frac{d\vec{A}}{dt} \cdot \vec{B} \quad \cdots \textcircled{2}$$

ベクトルの微分(2)

$\vec{A} \times \vec{B}$ の時間微分について考える

$$\begin{aligned} d(\vec{A} \times \vec{B}) &= (\vec{A} + d\vec{A}) \times (\vec{B} + d\vec{B}) - \vec{A} \times \vec{B} \\ &= \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times d\vec{B} + d\vec{A} \times \vec{B} + d\vec{A} \times d\vec{B} - \vec{A} \times \vec{B} \\ &= \vec{A} \times d\vec{B} + d\vec{A} \times \vec{B} + d\vec{A} \times d\vec{B} \end{aligned}$$

$$\frac{d(\vec{A} \times \vec{B})}{dt} = \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dt} + \frac{d\vec{A}}{dt} \times \vec{B} + \frac{d\vec{A}}{dt} \times \frac{d\vec{B}}{dt}$$

$\frac{d\vec{A}}{dt} \rightarrow 0 \quad \frac{d\vec{B}}{dt} \rightarrow 0 \quad \frac{d}{dt} \rightarrow 0$ なので

$$\frac{d(\vec{A} \times \vec{B})}{dt} = \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dt} + \frac{d\vec{A}}{dt} \times \vec{B} \quad \cdots \textcircled{3}$$

ベクトル解析の展開(1)

$$\vec{A} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z \quad \text{と一般的なベクトルを定義する。}$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial}{\partial x} (\vec{A})_x + \frac{\partial}{\partial y} (\vec{A})_y + \frac{\partial}{\partial z} (\vec{A})_z$$

ベクトルの発散 ダイバージェンス

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad \cdots \textcircled{1}$$

ベクトルの渦 ローテーション

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z \quad \cdots \textcircled{2}$$

ベクトル解析の展開(2)

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{A}) &= \frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{rot} \vec{A})_x + \frac{\partial}{\partial y} (\operatorname{rot} \vec{A})_y + \frac{\partial}{\partial z} (\operatorname{rot} \vec{A})_z \\&= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \\&= \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \\&\quad \text{微分の順序には影響を受けないので} \\&= \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) = 0 \\&\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{A}) = 0\end{aligned}$$

ベクトル解析の展開(3)

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{e}_z \quad \text{とベクトルを定義する。} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\operatorname{div}(\nabla \varphi) = \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \varphi)_x + \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \varphi)_y + \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \varphi)_z$$

ベクトルの発散 ダイバージェンス

$$\operatorname{div} \nabla \varphi = \nabla \cdot (\nabla \varphi) = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad \cdots \textcircled{2}$$

ベクトルの渦 ローテーション

微分の順序には影響を受けないので

$$\operatorname{rot}(\nabla \varphi) = \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \vec{e}_z = \vec{0} \quad \cdots \textcircled{3}$$

ベクトル解析の展開(4)

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \quad \cdots \textcircled{1} \quad \text{rot}(\text{rot} \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \cdots \textcircled{5}$$

$$\text{rot} \vec{A} = \nabla \times \vec{A} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{A}) = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{C} \cdot \vec{A}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C} \quad \cdots \textcircled{4}$$

の関係式を用いると

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = (\vec{A} \cdot \nabla) \nabla - (\nabla \cdot \nabla) \vec{A}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

ベクトル解析の応用・活用の事例

- 電磁気学での活用
- 惑星の運動
- 自然座標系
- 等速円運動
- 単振動

- 曲面の面積・体積

ガウスの法則（電荷について）

真空中に電荷が存在するとき、その電荷を取り囲む空間の電場に対する表面積分の値は、その閉じた空間内に存在する電気量に比例する。

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint \frac{\rho}{\epsilon_0} dx dy dz \quad \dots \textcircled{1}$$

電場についての表面積分を体積積分にガウスの法則により変更すると

$$\iiint \text{div} \vec{E} \cdot dx dy dz = \iiint \frac{\rho}{\epsilon_0} dx dy dz \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \dots \textcircled{3}$$

空間に誘電分極があるときに、分極のモーメントが $\vec{P}$ で表せるときに空間には $-\text{div} \vec{P} = \rho'$ の分極電荷が誘起される。

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho - \text{div} \vec{P}}{\epsilon_0} \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\text{div} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho \quad \dots \textcircled{5}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \text{div} \vec{D} = \rho \quad \dots \textcircled{6}$$

ガウスの法則（磁荷について）

真空中に磁荷が存在するとき、その磁荷を取り囲む空間の磁場に対する表面積分の値は、その閉じた空間内に存在する磁気量に比例する。

$$\int \vec{H} \cdot d\vec{S} = \iiint \frac{\rho_M}{\mu_0} dx dy dz \dots ①$$

磁場についての表面積分を体積積分にガウスの法則により変更すると

$$\iiint \operatorname{div} \vec{H} \cdot dx dy dz = \iiint \frac{\rho_M}{\mu_0} dx dy dz \dots ②$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = \frac{\rho_M}{\mu_0} \dots ③$$

空間に誘電分極があるときに、分極のモーメントが $\vec{P}_M$ で表せるときに空間には $-\operatorname{div} \vec{P}_M = \rho'_M$ の分極磁荷が誘起される。

$$\operatorname{div} \vec{H} = \frac{\rho - \operatorname{div} \vec{P}_M}{\mu_0} \dots ④$$

$$\operatorname{div} (\mu_0 \vec{H} + \vec{P}_M) = \rho_M \dots ⑤$$

真磁荷はないので $\rho_M = 0$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{P}_M \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \dots ⑥$$

ファラデーの法則

ファラデーの電磁誘導の法則よりある閉回路の通過する磁束中の時間変化率が、その周回での起電力になる。次の式で表せる。

$$V = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad \dots \textcircled{1}$$

磁束Φは磁束密度ベクトルを用いて表すと

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad \dots \textcircled{2}$$

①をベクトル記号を用いると

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad \dots \textcircled{3}$$

ストークスの定理を用いると

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad \dots \textcircled{3}$$

$$-\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \int \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\int \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \text{rot } \vec{E} \right) \cdot d\vec{S} = 0 \quad \dots \textcircled{5}$$

⑤の関係が常に成り立つには次の関係が成り立つ。

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \text{rot } \vec{E} = 0 \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\text{rot } \vec{E} \quad \dots \textcircled{6}$$

アンペールの法則

ある閉回路を通過する電流Iの大きさは、その周回での磁場Hの線積分に等しい。
線積分の向きは、電流の流れる向きを右ねじの進行方向とした時の回転の向きを正とする。

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = I \quad \dots ①$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad \dots ②$$

$$\int \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{S} = \int \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad \dots ③$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} \quad \dots ④$$

$$\text{div}(\text{rot } \vec{H}) = \text{div } \vec{j} = 0 \quad \dots ⑤ \quad \text{となるが、}$$

空間に真電荷が存在するときの電気量保存の関係から

$$\text{div } \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \text{div } \vec{D}}{\partial t} = -\text{div } \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \dots ⑥$$

$$\therefore \text{div} \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0 \quad \dots ⑦$$

電荷の時間変化も電流を生み出すことになり変位電流という。

$$\vec{j}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \dots ⑧$$

変位電流密度まで含めた④式は

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \dots ⑨$$

マックスウェルの電磁方程式

以下の4つの式が電磁気現象を説明する基礎となる方程式である。
マックスウェルが数学的にまとめ上げた理論式(1864年)である。

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \vec{E} \quad \cdots \textcircled{4}$$

ただし $\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$

ベクトルポテンシャル(1)

マックスウェルの方程式から

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \cdots \textcircled{1} \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \vec{E} \quad \cdots \textcircled{2}$$

磁束密度BがベクトルAの回転から導けると仮定する。

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad \cdots \textcircled{3}$$

ベクトルAの渦(回転)の発散は常に0である。

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{A}) = \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \cdots \textcircled{4}$$

従って、マックスウェルの方程式の関係を満たす磁束密度Bを導けることになる。

③を②に代入する。

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{rot} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \vec{E}$$

$$\operatorname{rot} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{E} \right) = 0 \quad \cdots \textcircled{5}$$

$$\operatorname{rot}(-\nabla \varphi) = 0 \quad \cdots \textcircled{6} \quad \text{は常に成り立つので}$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{E} = -\nabla \varphi$$

$$\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \cdots \textcircled{7}$$

ベクトルポテンシャル(2)

$$\vec{A} + \nabla f \quad \cdots \textcircled{8} \quad \varphi - \frac{\partial f}{\partial t} \quad \cdots \textcircled{9}$$

とAとφを書き換えて前ページ⑦に代入する。

$$-\nabla \left(\varphi - \frac{\partial f}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{A} + \nabla f) \quad \cdots \textcircled{10}$$

$$-\nabla \varphi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla f) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla f) \quad \cdots \textcircled{11}$$

$$-\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E} \quad \cdots \textcircled{12}$$

となり同じEを結果的に導くことになる。

$$\text{rot}(\vec{A} + \nabla f) = \text{rot} \vec{A} + \text{rot} \nabla f = \text{rot} \vec{A} \quad \cdots \textcircled{13}$$

従ってベクトルポテンシャルには自由度がある。

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \text{rot} \vec{H} - \vec{j} \quad \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \text{rot} \vec{B} - \vec{j} \quad \cdots \textcircled{14}$$

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{1}{\mu} \text{rot} (\text{rot} \vec{A}) - \vec{j}$$

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{1}{\mu} \left(\nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \right) - \vec{j} \quad \cdots \textcircled{15}$$

ベクトルポテンシャル(3)

$$\epsilon\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \left(\nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \right) - \mu \vec{j}$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) + \nabla \epsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \mu \vec{j}$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \epsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \mu \vec{j} \quad \dots \textcircled{16}$$

$$\nabla \cdot \vec{A} + \epsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \text{ ならば } \dots \textcircled{17}$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{j} \quad \dots \textcircled{18}$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad \dots \textcircled{19}$$

$$\nabla \left(-\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$-\nabla \cdot (\nabla \varphi) - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{A} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\epsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad \textcircled{17} \text{の式を用いると}$$

$$-\nabla^2 \varphi + \epsilon\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

ベクトルポテンシャル(4)

$$\nabla \cdot \vec{A} + \epsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad \text{ならば} \quad \dots \textcircled{17}$$

ローレンツの条件式

$$\nabla^2 \vec{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{j} \quad \dots \textcircled{18}$$

$$\nabla^2 \varphi - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad \dots \textcircled{20}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad \epsilon\mu = \frac{1}{c^2}$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{A} = \mu \vec{j}$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \nabla^2 \varphi = \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad \text{とおけば}$$

$$\square \vec{A} = \mu \vec{j} \quad \square \varphi = \frac{\rho}{\epsilon}$$

万有引力による惑星の運動(1)

O点に質量Mの太陽、P点に質量mの惑星が力を及ぼし合いながら運動している

惑星の角運動量は

$$\vec{L} = \vec{r} \times m \vec{v} \quad \cdots \textcircled{1}$$

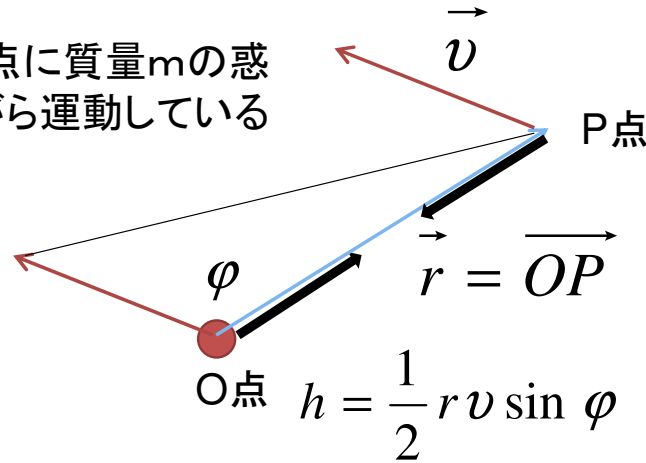
惑星の面積速度は

$$\vec{h} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v} \quad \cdots \textcircled{2}$$

運動方程式(万有引力)より

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -G \frac{Mm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -G \frac{M}{r^3} \vec{r} \quad \cdots \textcircled{4}$$



$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m \vec{v} + \vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{v} \times m \vec{v} + \vec{r} \times m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{v} \times m \vec{v} + \vec{r} \times m \left(-G \frac{M}{r^3} \vec{r} \right) = \vec{0}$$

$$\vec{L} = \text{一定} \quad \cdots \textcircled{5} \quad \frac{\vec{L}}{m} = \vec{r} \times \vec{v} \quad \cdots \textcircled{6}$$

$$\vec{h} = \frac{1}{2} \frac{\vec{L}}{m} \quad \cdots \textcircled{7} \quad \text{面積速度は一定となる。}$$

万有引力による惑星の運動(2)

$\vec{r}$ と $\vec{v}$ は $\vec{h}$ と垂直な平面内を動く

$$\vec{h} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v} \quad 2\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v} \quad (\text{一定}) \quad \cdots \textcircled{8}$$

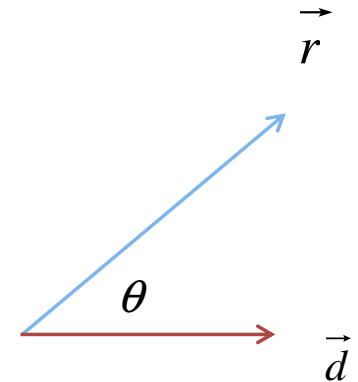
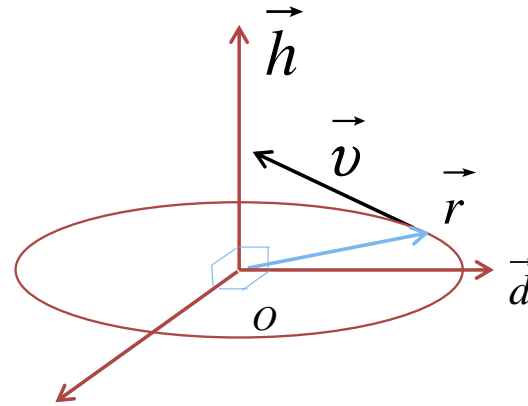
⑧の左右各辺の左から④をかける(外積をとる)と

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \times 2\vec{h} = -G \frac{M}{r^3} \vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{v}) \quad \cdots \textcircled{9}$$

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \times 2\vec{h} = -G \frac{M}{r^3} \{ (\vec{r} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{v} \} \quad \cdots \textcircled{10}$$

$$\vec{r} \cdot \vec{r} = r \cdot r = r^2 \quad \frac{d}{dt} (\vec{r} \cdot \vec{r}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 2\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 2r \frac{dr}{dt} \quad \cdots \textcircled{11}$$

$$\frac{d}{dt} \vec{r} \cdot \vec{r} = \frac{dr}{dt} r = \vec{v} \cdot \vec{r} = \vec{r} \cdot \vec{v} \quad \cdots \textcircled{12}$$



万有引力による惑星の運動(3)

⑩に⑫を代入する

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \times 2\vec{h} = -G \frac{M}{r^3} \left\{ r \frac{dr}{dt} \cdot \vec{r} - r^2 \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right\}$$

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \times 2\vec{h} = GM \left\{ \frac{1}{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} \cdot \vec{r} \right\} \quad \dots \textcircled{13}$$

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \times 2\vec{h} = GM \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times 2\vec{h} \right) = GM \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times 2\vec{h} \right) = \frac{d}{dt} \left(GM \frac{\vec{r}}{r} \right) \quad \dots \textcircled{14}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times 2\vec{h} = GM \left(\frac{\vec{r}}{r} + e\vec{d} \right) \quad \dots \textcircled{15}$$

$$\vec{v} \times 2\vec{h} = GM \left(\frac{\vec{r}}{r} + e\vec{d} \right) \quad \dots \textcircled{16}$$

$$\vec{r} \cdot (\vec{v} \times 2\vec{h}) = GM \vec{r} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r} + e\vec{d} \right)$$

$$2\vec{h} \cdot (\vec{r} \times \vec{v}) = GM \left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}}{r} + e\vec{r} \cdot \vec{d} \right)$$

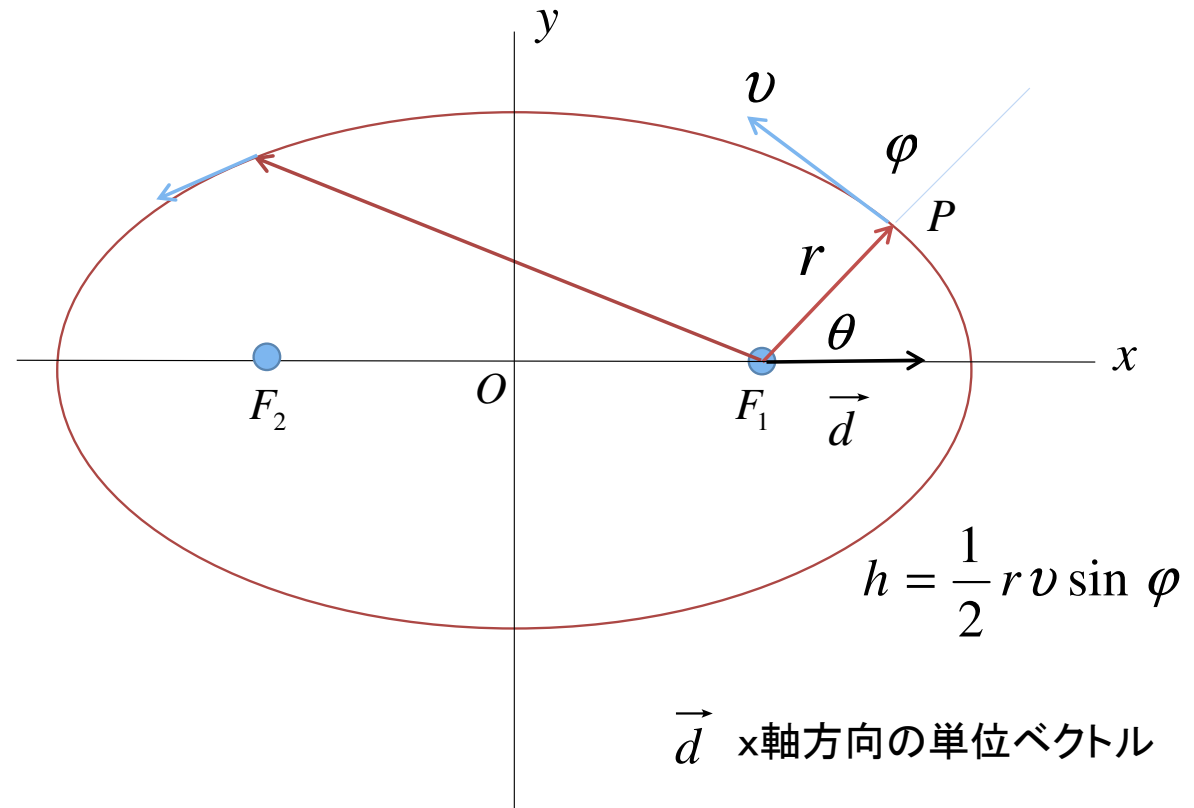
$$|2\vec{h}|^2 = GM (r + er \cos \theta) \quad \dots \textcircled{17}$$

万有引力による惑星の運動(4)

$$|2\vec{h}|^2 = GMr (1 + e \cos \theta) \quad \cdots (18)$$

$$r = \frac{\frac{|2\vec{h}|^2}{GM}}{(1 + e \cos \theta)} \quad \frac{|2\vec{h}|^2}{GM} = l \quad \cdots (19)$$

$$r = \frac{l}{(1 + e \cos \theta)} \quad \cdots (20)$$



楕円軌道の定義(1)

x軸上の2点 F_1 と F_2 から点Pまで引いた直線の距離 r_1 と r_2 の和が一定である点を連ねたときの軌道を楕円という。

$$r_1 + r_2 = 2a(\text{一定}) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$r_2^2 = (2c)^2 + r_1^2 - 4cr_1 \cos(\pi - \theta)$$

$$r_2^2 = 4c^2 + r_1^2 + 4cr_1 \cos \theta \quad \cdots \textcircled{2}$$

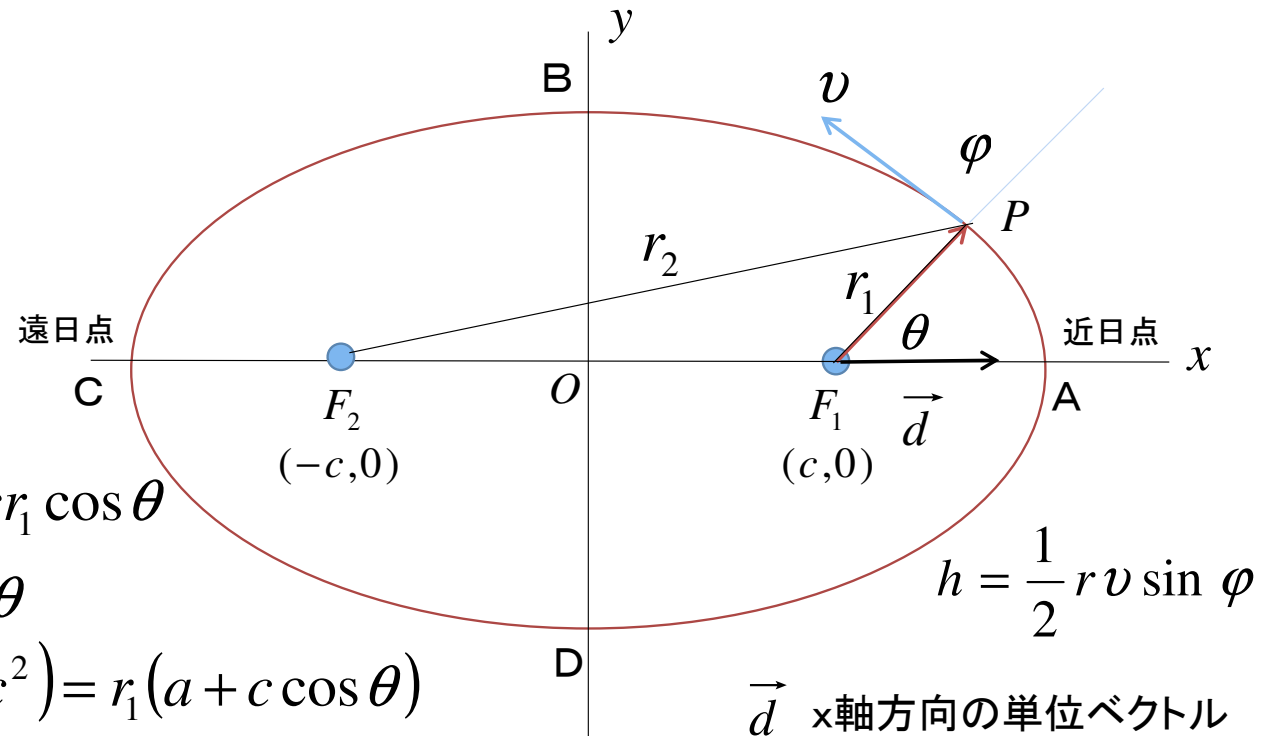
$$r_2 = 2a - r_1 \quad (2a - r_1)^2 = 4c^2 + r_1^2 + 4cr_1 \cos \theta$$

$$4a^2 + r_1^2 - 4ar_1 = 4c^2 + r_1^2 + 4cr_1 \cos \theta$$

$$4a^2 - 4ar_1 = 4c^2 + 4cr_1 \cos \theta \quad (a^2 - c^2) = r_1(a + c \cos \theta)$$

$$r_1 = \frac{(a^2 - c^2)}{(a + c \cos \theta)} \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\begin{aligned} \theta=0 \text{ のときに } & \Rightarrow \overline{F_1 A} = \frac{(a^2 - c^2)}{(a + c)} = a - c \Rightarrow \overline{F_1 A} + c = a = \overline{OA} \\ \theta=\pi \text{ のときに } & \Rightarrow \overline{F_1 C} = \frac{(a^2 - c^2)}{(a - c)} = a + c = \overline{OC} + c \Rightarrow \overline{OC} = a \end{aligned}$$



楕円軌道の定義(2)

$$r_1 = \frac{(a^2 - c^2)}{(a + c \cos \theta)} \quad \dots \textcircled{4}$$

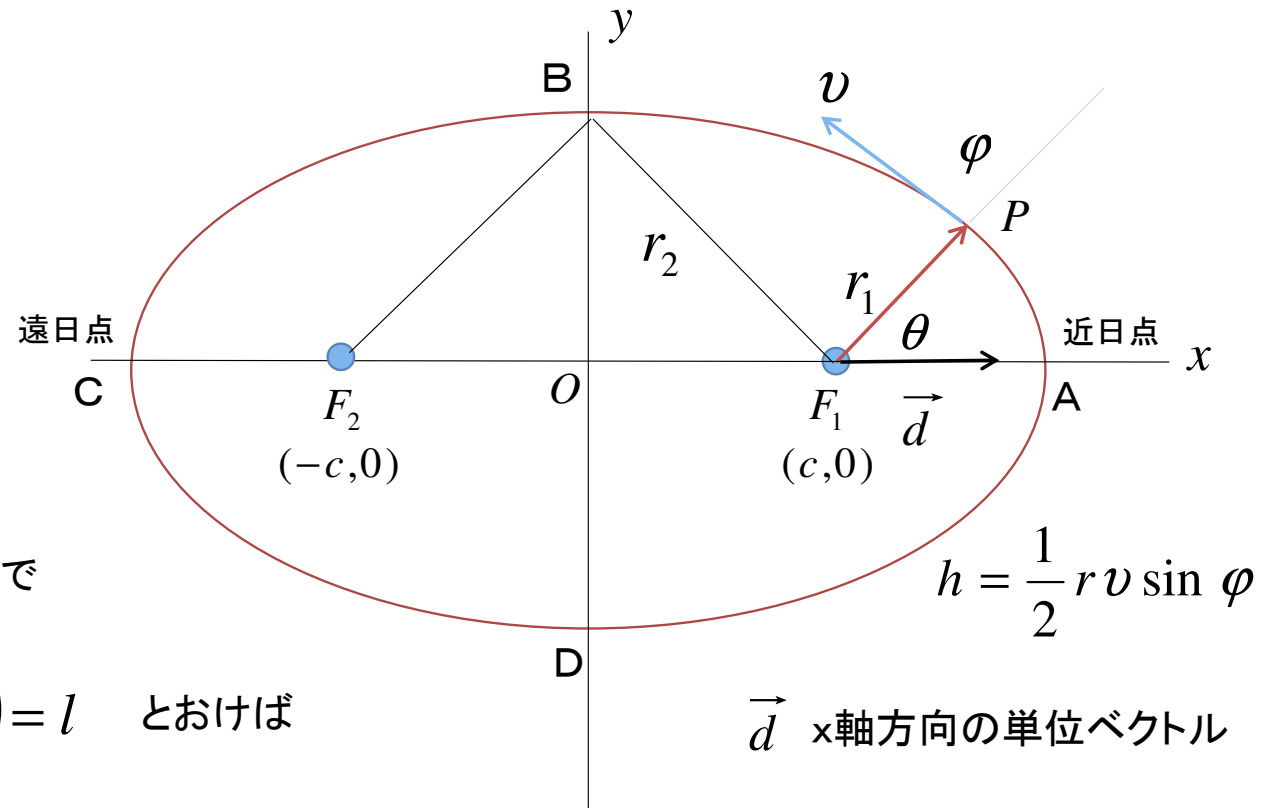
$$r_1 = \frac{(a^2 - c^2)}{a \left(1 + \frac{c}{a} \cos \theta \right)}$$

$e = \frac{c}{a}$ 離心率 $c = ea$ を④に代入すると

$$a^2 - c^2 = a^2 - e^2 a^2 = a^2 (1 - e^2) \quad \text{なので}$$

$$r_1 = \frac{a(1 - e^2)}{(1 + e \cos \theta)} \quad \dots \textcircled{5} \quad a(1 - e^2) = l \quad \text{とおけば}$$

$$r = \frac{l}{(1 + e \cos \theta)} \quad \dots \textcircled{6} \quad \text{となる。}$$



$a = AO = CO$ 半長軸

$b = BO = DO$ 半短軸

楕円軌道の定義(3)

$$r = \frac{l}{(1 + e \cos \theta)} \quad \dots \textcircled{6}$$

$$a = \overline{AO} = \overline{CO} \quad \text{半長軸}$$

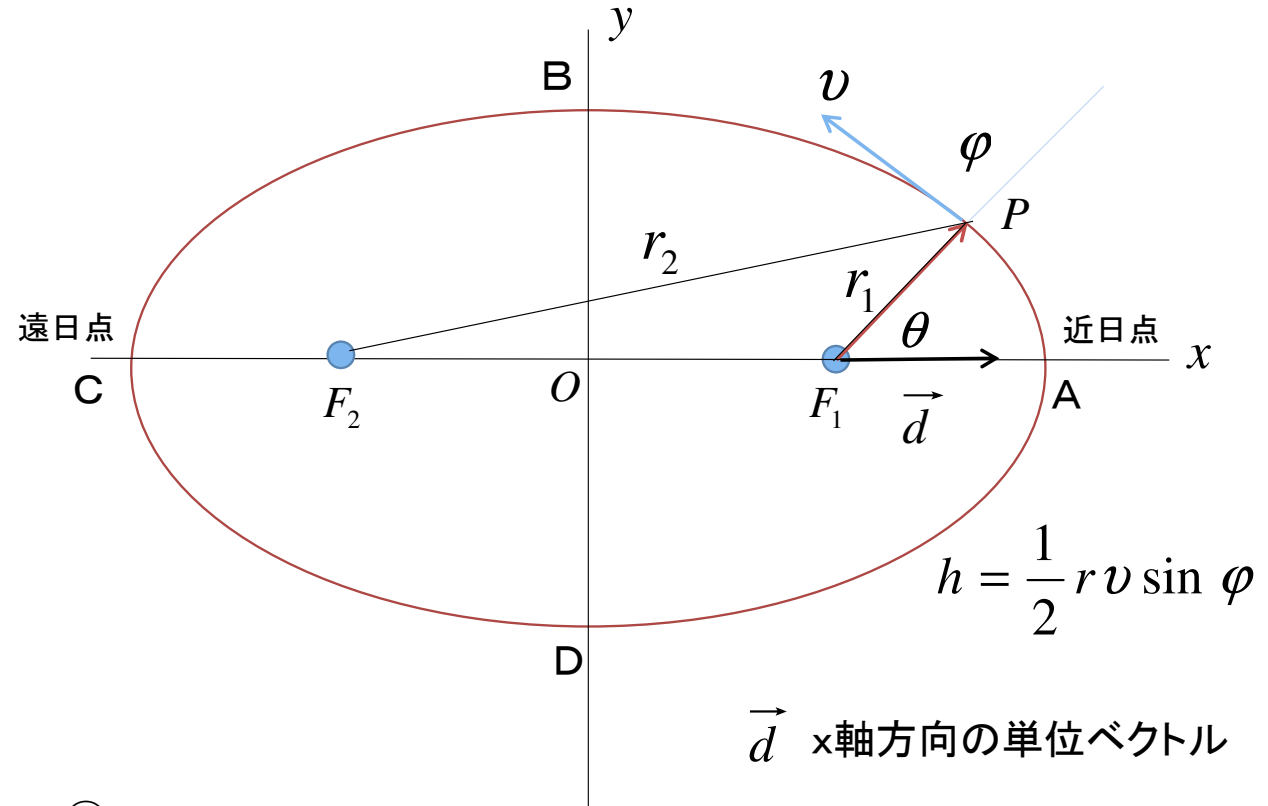
$$b = \overline{BO} = \overline{DO} \quad \text{半短軸}$$

$$\overline{OF_1} = ea$$

$$b^2 = a^2 - \overline{OF_1}^2 = a^2 - e^2 a^2 = a^2(1 - e^2)$$

$$b = a\sqrt{1 - e^2} \quad \dots \textcircled{7}$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{l^2}{(1 + e \cos \theta)^2} d\theta \quad \dots \textcircled{8}$$



万有引力による惑星の運動(離心率)・1

$$\frac{\vec{v} \times 2\vec{h}}{GM} = \frac{\vec{r}}{r} + e\vec{d} \quad e\vec{d} = \frac{\vec{v} \times 2\vec{h}}{GM} - \frac{\vec{r}}{r}$$

$$(e\vec{d})^2 = \left(\frac{\vec{v} \times 2\vec{h}}{GM} - \frac{\vec{r}}{r} \right)^2$$

$$e^2 |\vec{d}|^2 = \frac{(\vec{v} \times 2\vec{h})^2}{(GM)^2} + \frac{r^2}{r^2} - 2 \frac{(\vec{v} \times 2\vec{h}) \cdot \vec{r}}{GM r}$$

$$e^2 = \frac{(\vec{v} \times 2\vec{h})^2}{(GM)^2} + 1 - 2 \frac{(\vec{v} \times 2\vec{h}) \cdot \vec{r}}{GM r}$$

$$\vec{v} \perp 2\vec{h} \quad \text{なので} \quad |\vec{v} \times 2\vec{h}| = |\vec{v}| |2\vec{h}| \sin \frac{\pi}{2} = |\vec{v}| |2\vec{h}|$$

$$e^2 = \frac{v^2 (2h)^2}{(GM)^2} + 1 - 2 \frac{(\vec{r} \times \vec{v}) \cdot 2\vec{h}}{GM r}$$

$$e^2 = \frac{v^2 (2h)^2}{(GM)^2} + 1 - 2 \frac{|2\vec{h}|^2}{GM r}$$

$$e^2 - 1 = \frac{v^2 |2h|^2}{(GM)^2} - 2 \frac{|2h|^2}{GM r}$$

$$e^2 - 1 = \frac{|2h|^2}{(GM)^2} \left(v^2 - 2 \frac{GM}{r} \right) \quad \dots \textcircled{1}$$

万有引力による惑星の運動(離心率)・2

$$e^2 - 1 = \frac{|2h|^2}{(GM)^2} \left(v^2 - 2 \frac{GM}{r} \right)$$

$$e^2 - 1 > 0 \quad \text{初期条件として}$$

$$e > 1$$

$$\frac{|2h|^2}{(GM)^2} \left(v_0^2 - 2 \frac{GM}{r_0} \right) > 0$$

$$v_0^2 > 2 \frac{GM}{r_0}$$

$$e^2 - 1 = 0 \quad e = 1 \quad v_0^2 = 2 \frac{GM}{r_0}$$

$$e^2 - 1 < 0 \quad e < 1 \quad v_0^2 < 2 \frac{GM}{r_0}$$

$$v_0 > \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} \quad e > 1 \quad \text{双曲線}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} \quad e = 1 \quad \text{放物線}$$

$$v_0 < \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} \quad e < 1 \quad \text{楕円}$$

万有引力による惑星の運動(離心率)・3

$$E = \frac{1}{2}m\left(v^2 - 2\frac{GM}{r}\right) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \text{一定}$$

$$\frac{2E}{m} = \left(v^2 - 2\frac{GM}{r}\right)$$

$$e^2 - 1 = \frac{2|2h|^2}{(GM)^2} \frac{E}{m}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2|2h|^2}{(GM)^2} \frac{E}{m}} \quad \dots \textcircled{2}$$

$E > 0$ 双曲線

$E = 0$ 放物線

$E < 0$ 楕円

$$a(1 - e^2) = l \quad \frac{|2\vec{h}|^2}{GM} = l \quad \text{なので}$$

$$-a \frac{2|2h|^2}{(GM)^2} \frac{E}{m} = \frac{|2\vec{h}|^2}{GM} \quad a = \frac{GMm}{2(-E)} \quad \dots \textcircled{3}$$

$$b = a\sqrt{1 - e^2} \quad \text{より} \quad b = |h| \sqrt{\frac{2m}{(-E)}} \quad \dots \textcircled{4}$$

$$h = \frac{L}{2m} \quad b = \frac{L}{2m} \sqrt{\frac{2m}{(-E)}} = \frac{L}{\sqrt{2m(-E)}} \quad \dots \textcircled{5}$$

半長軸aの長さは力学的エネルギーで決まる

半短軸bの長さは角運動量が大きいと長くなる

万有引力による惑星の運動(ケプラーの法則)

楕円の面積Sは

$$S = \pi ab \quad T = \frac{S}{h} = \frac{\pi ab}{h} \quad \dots \textcircled{6}$$

$$(1 - e^2) = \frac{l}{a}$$

$$b = a\sqrt{1 - e^2} \quad b = a\sqrt{\frac{l}{a}} = \sqrt{al}$$

$$T = \frac{\pi ab}{h} = \frac{\pi a\sqrt{al}}{h}$$

$$T^2 = \frac{\pi^2 a^3 l}{h^2}$$

$$\frac{4|\vec{h}|^2}{GM} = l \quad \text{なので}$$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{\pi^2}{h^2} \frac{4|\vec{h}|^2}{GM} = \frac{4\pi^2}{GM} \quad \dots \textcircled{7}$$

ケプラーの第三法則が導かれる

自然座標系 (1)

点Oから点Pまでの弧長Sを変数に用いる

$\vec{r}(s)$ 単位接線ベクトルは

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds} \quad \dots \textcircled{1}$$

単位接線ベクトルの変化率

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{d\vec{r}}{ds} \right) \quad \dots \textcircled{2}$$

単位接線ベクトルの移動距離に対する進行方向の変化率を曲率という

$$\left| \frac{d\vec{t}}{ds} \right| = \frac{d\theta}{ds} = \kappa \quad \dots \textcircled{3}$$

$$ds = \frac{d\theta}{\kappa} = \rho d\theta \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\rho = \frac{1}{\kappa}$$

ρ は、曲率半径を意味する

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \kappa \vec{n} \quad \dots \textcircled{5}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = v \vec{t} \quad \dots \textcircled{6}$$

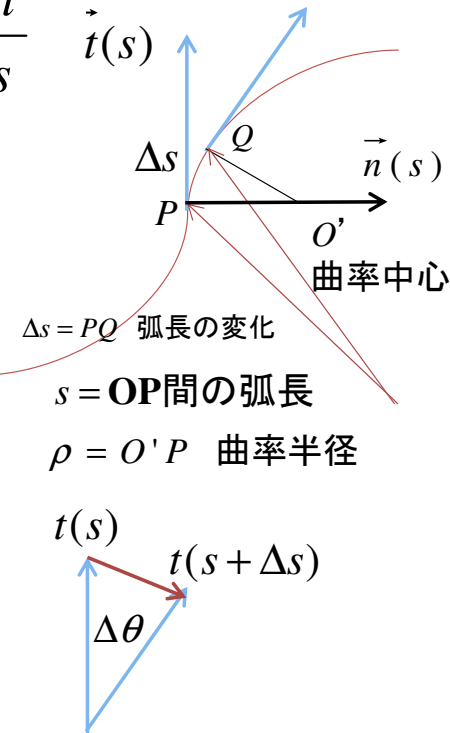
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{t} + v \frac{d\vec{t}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{t}}{dt} = \frac{d\vec{t}}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{d\vec{t}}{ds}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{t} + v^2 \frac{d\vec{t}}{ds}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{t} + v^2 \kappa \vec{n}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{t} + \frac{v^2}{\rho} \vec{n} \quad \dots \textcircled{7}$$



自然座標系 (2)

$$\frac{d}{ds} (\vec{t})^2 = 2\vec{t} \frac{d\vec{t}}{ds} = 0$$

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \kappa(s)\vec{n} \quad \text{なので}$$

$$\kappa(s)\vec{t}\vec{n} = 0$$

$\vec{n}$ は $\vec{t}$ に垂直

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} \quad \vec{b} \text{ は } \vec{t} \text{ に垂直}$$

$$\frac{d}{ds} (\vec{b})^2 = 2\frac{d\vec{b}}{ds} \vec{b} = 0$$

$$\frac{d\vec{b}}{ds} \text{ は } \vec{b} \text{ に垂直}$$

$$\vec{b}\vec{t} = 0$$

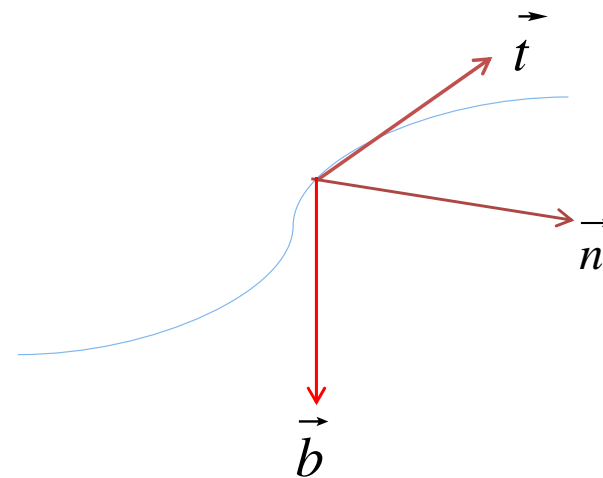
$$\frac{d\vec{b}}{ds} \vec{t} + \vec{b} \frac{d\vec{t}}{ds} = 0$$

$$\frac{d\vec{b}}{ds} \vec{t} = -\vec{b} \frac{d\vec{t}}{ds} = -\kappa(s)\vec{b}\vec{n} = 0$$

$$\frac{d\vec{b}}{ds} \text{ は } \vec{t} \text{ に垂直} \quad \text{したがって}$$

$$\frac{d\vec{b}}{ds} \text{ は } \vec{n} \text{ に平行である}$$

$$\therefore \frac{d\vec{b}}{ds} = -\tau(s)\vec{n}$$



自然座標系 (3)

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t}$$

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{d\vec{b}}{ds} \times \vec{t} + \vec{b} \times \frac{d\vec{t}}{ds}$$

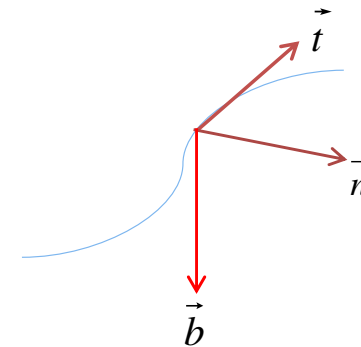
$$\frac{d\vec{n}}{ds} = -\tau(s)\vec{n} \times \vec{t} + \kappa(s)\vec{b} \times \vec{n}$$

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = -\kappa(s)\vec{t} + \tau(s)\vec{b}$$

以下の二つの関係式まであわせると行列を用いて右のように表せる

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \kappa(s)\vec{n} \quad \frac{d\vec{b}}{ds} = -\tau(s)\vec{n}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{d\vec{t}}{ds} \\ \frac{d\vec{n}}{ds} \\ \frac{d\vec{b}}{ds} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{bmatrix}$$



等速円運動(1)

AからPまでの円周の弧の長さを S とする。また中心角を θ とする。

各ベクトルは、 S の関数とみなす。

$$s = r\theta \quad \theta = \frac{s}{r} \quad \cdots \textcircled{1} \quad \frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} = v \quad \cdots \textcircled{2}$$

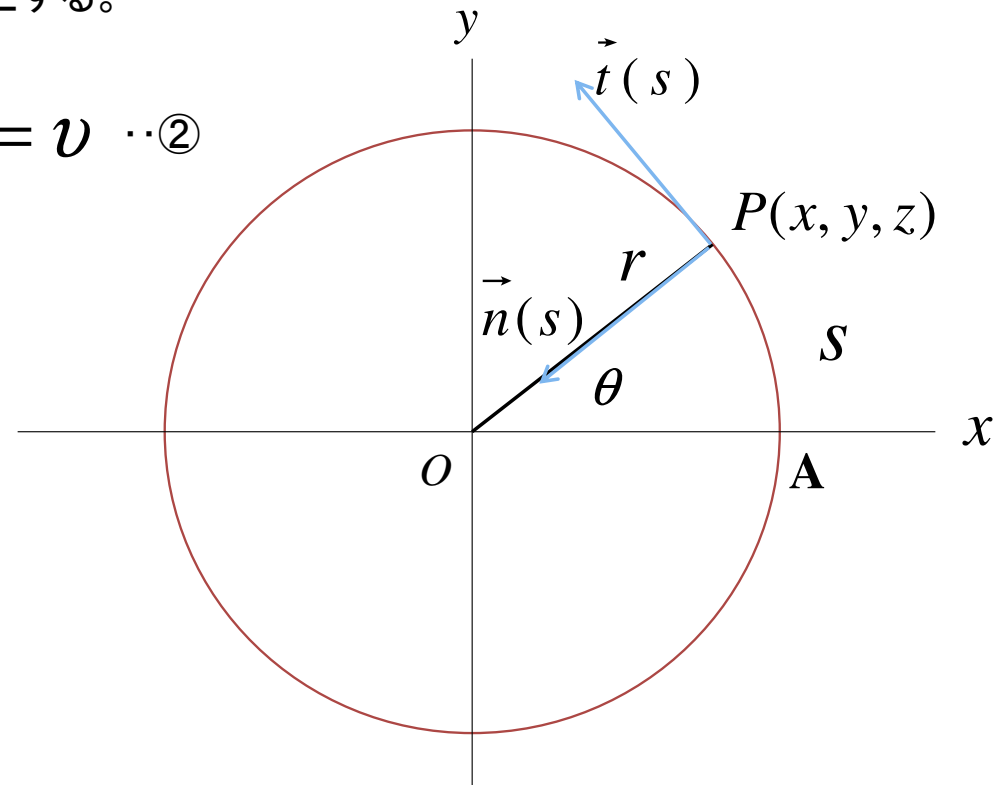
$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\vec{r} = x \mathbf{i}_1 + y \mathbf{i}_2 + z \mathbf{i}_3 \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\vec{r} = r \cos \frac{s}{r} \mathbf{i}_1 + r \sin \frac{s}{r} \mathbf{i}_2 \quad \cdots \textcircled{5}$$

接線方向の単位ベクトルは

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds} = -\sin \frac{s}{r} \mathbf{i}_1 + \cos \frac{s}{r} \mathbf{i}_2 \quad \cdots \textcircled{6}$$



等速円運動(2)

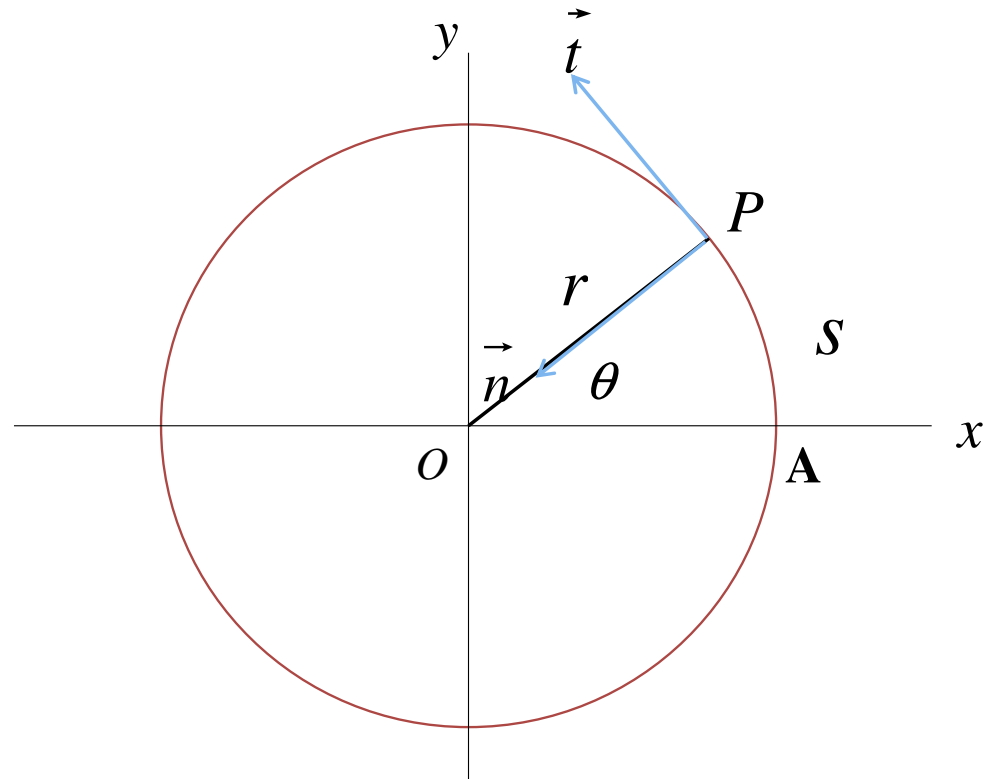
$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left(-\sin \frac{s}{r} \mathbf{i}_1 + \cos \frac{s}{r} \mathbf{i}_2 \right)$$

$$= -\frac{1}{r} \left(\cos \frac{s}{r} \mathbf{i}_1 + \sin \frac{s}{r} \mathbf{i}_2 \right)$$

$$= \frac{1}{r} \left[- \left(\cos \frac{s}{r} \mathbf{i}_1 + \sin \frac{s}{r} \mathbf{i}_2 \right) \right] \quad \cdots \textcircled{7}$$

$$\vec{n} = - \left(\cos \frac{s}{r} \mathbf{i}_1 + \sin \frac{s}{r} \mathbf{i}_2 \right) \quad \cdots \textcircled{8}$$

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{1}{r} \left[- \left(\cos \frac{s}{r} \mathbf{i}_1 + \sin \frac{s}{r} \mathbf{i}_2 \right) \right] = \kappa \vec{n} \quad \cdots \textcircled{9}$$



$$\kappa = \frac{1}{r} \quad \cdots \textcircled{10}$$

等速円運動(3)

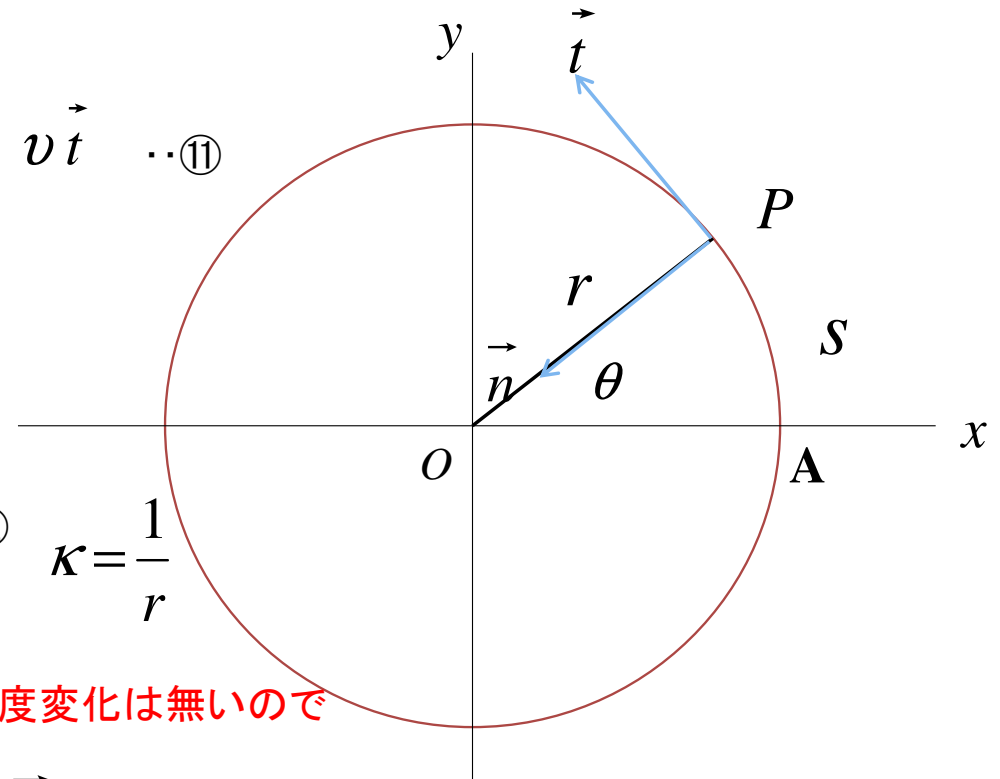
$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \frac{d\vec{r}}{ds} = v \left(-\sin \frac{s}{r} \mathbf{i}_1 + \cos \frac{s}{r} \mathbf{i}_2 \right) = v \vec{t} \quad \cdots \textcircled{11}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{t} + v \frac{d\vec{t}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{t} + v \frac{d\vec{t}}{ds} \frac{ds}{dt}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{t} + v^2 \frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{dv}{dt} \vec{t} + v^2 \kappa \vec{n} \quad \cdots \textcircled{12} \quad \kappa = \frac{1}{r}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_t \vec{t} + a_n \vec{n} \quad \cdots \textcircled{13} \quad \text{円の接線方向には速度変化は無いので}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 0 \quad a_n = v^2 \kappa = \frac{v^2}{r} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{v^2}{r} \vec{n} \quad \cdots \textcircled{14}$$



単振り子(1)

自然座標系で単振り子の振動を考察する。最下点AからPまでの円周の弧の長さをSとする。また振れ角を θ とする。各ベクトルは、Sの関数とみなす。

$$s = l\theta \quad \theta = \frac{s}{l} \quad \cdots \textcircled{1} \quad \frac{ds}{dt} = l \frac{d\theta}{dt} = v \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{dv}{dt} \vec{t} + \frac{mv^2}{l} \vec{n} \quad \cdots \textcircled{3} \quad \kappa = \frac{1}{l}$$

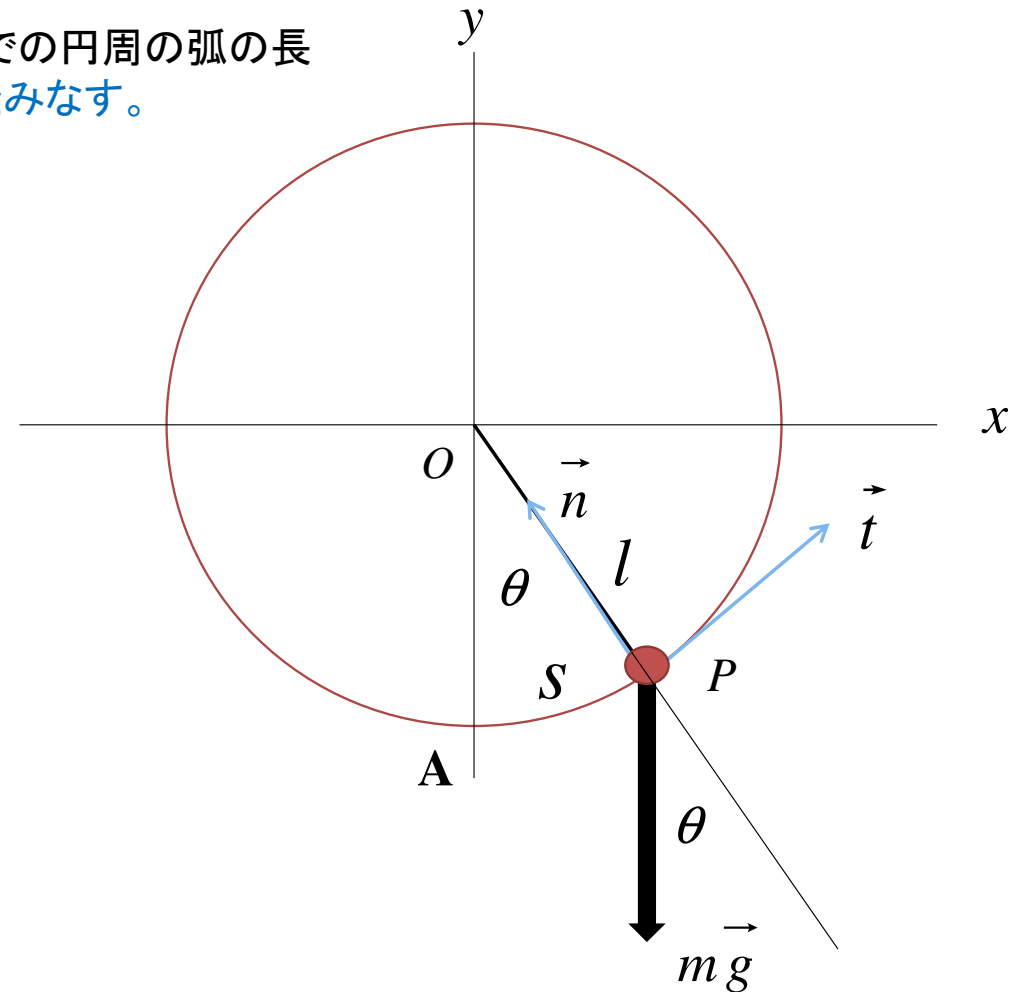
$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} = F_t \vec{t} + F_n \vec{n} \quad \cdots \textcircled{4} \quad F_t = -mg \sin \theta$$

$$F_n = T - mg \cos \theta$$

③と④より

$$m \frac{dv}{dt} = -mg \sin \theta \quad \frac{mv^2}{l} = T - mg \cos \theta$$

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin \theta \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta \quad \cdots \textcircled{5}$$



単振り子(2)

$$\frac{d\theta}{dt} \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \quad \dots \textcircled{6}$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] = -\frac{g}{l} \sin \theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$\int_0^t \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] dt = -\frac{g}{l} \int_{\theta_0}^{\theta} \sin \theta d\theta$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\frac{g}{l} [-\cos \theta]_{\theta_0}^{\theta} \quad \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{2g}{l} [\cos \theta - \cos \theta_0]$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2g}{l} [\cos \theta - \cos \theta_0]}$$

$$\sqrt{\frac{2g}{l}} dt = \pm \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} \quad \cos \theta = \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 - 2\sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\sqrt{\frac{2g}{l}} dt = \pm \frac{d\theta}{\sqrt{1 - 2\sin^2 \frac{\theta}{2} - \left(1 - 2\sin^2 \frac{\theta_0}{2} \right)}}$$

$$\sqrt{\frac{2g}{l}} dt = \pm \frac{d\theta}{\sqrt{2 \left(\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)}} \quad \dots \textcircled{7}$$

$\theta = \theta_0 \rightarrow \theta = 0$ なので-をとる

$$2\sqrt{\frac{g}{l}} \int_0^{t_1} dt = - \int_{\theta_0}^0 \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}$$

$$2\sqrt{\frac{g}{l}} \int_0^{t_1} dt = \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} \quad \dots \textcircled{8}$$

単振り子(3)

$$k = \sin \frac{\theta_0}{2} \quad \sin \frac{\theta}{2} = kz \quad \text{とおくと}$$

$$2\sqrt{\frac{g}{l}} \int_0^{t_1} dt = \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{k\sqrt{1-z^2}}$$

$$\frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = kdz \quad \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}} d\theta = kdz$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{1 - k^2 z^2} d\theta = kdz \quad d\theta = \frac{2kdz}{\sqrt{1 - k^2 z^2}}$$

$$\theta = 0 \quad \rightarrow \quad z = 0$$

$$\theta = \theta_0 \quad \rightarrow \quad z = \frac{1}{k} \sin \frac{\theta_0}{2} = 1$$

$$2\sqrt{\frac{g}{l}} \int_0^{t_1} dt = \int_0^1 \frac{1}{k\sqrt{1-z^2}} \frac{2kdz}{\sqrt{1-k^2 z^2}} \quad \dots \textcircled{9}$$

$$\sqrt{\frac{g}{l}} \int_0^{t_1} dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \frac{dz}{\sqrt{1-k^2 z^2}}$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2} \sqrt{1-k^2 z^2}} \quad \dots \textcircled{10}$$

1往復の4分の1の時間なので

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2} \sqrt{1-k^2 z^2}} \quad \dots \textcircled{11}$$

単振り子(4)

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2} \sqrt{1-k^2 z^2}}$$

$$z = \sin \theta \quad k = \sin \frac{\theta_0}{2}$$

$$dz = \cos \theta d\theta \quad \sqrt{1-\sin^2 \theta} = \cos \theta$$

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta d\theta}{\cos \theta \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}}$$

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} \quad \dots \textcircled{12}$$

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2} \sqrt{1-k^2 z^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} \quad \dots \textcircled{13}$$

マクローリン展開より

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} = 1 - \frac{1}{2}(-k^2 \sin^2 \theta) + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{2!}(-k^2 \sin^2 \theta)^2 +$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} \doteq 1 + \frac{1}{2}k^2 \sin^2 \theta + \frac{3}{8}k^4 \sin^4 \theta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \theta d\theta = \frac{\pi}{2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \quad \dots \textcircled{14}$$

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{2}k^2 \sin^2 \theta + \frac{3}{8}k^4 \sin^4 \theta + \dots \right) d\theta \quad \dots \textcircled{15}$$

単振り子(5)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta d\theta = \frac{\pi}{2} \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}$$

$$K(k) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} k^2 + \frac{\pi}{2} \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{3}{8} k^4$$

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{4} k^2 + \frac{9}{64} k^4 + \dots \right)$$

$$k = \sin \frac{\theta_0}{2} \quad \theta_0 \approx 0$$

$$k \doteq \frac{\theta_0}{2}$$

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{\theta_0^2}{4} + \frac{9}{64} \frac{\theta_0^4}{16} + \dots \right) \quad \dots \textcircled{16}$$

⑫から

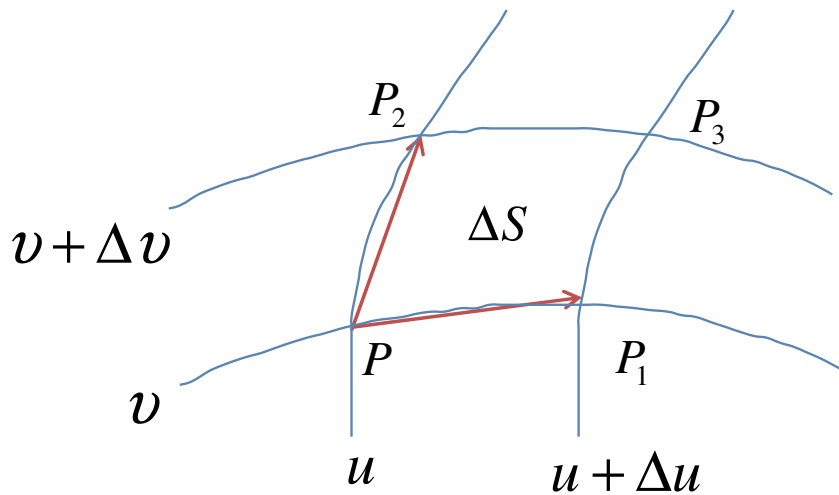
$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} K(k)$$

$$T \doteq 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} + \frac{9}{64} \frac{\theta_0^4}{16} + \dots \right) \quad \dots \textcircled{17}$$

振れ角が大きくなると等時性は成り立たなくなる

曲面の面積 (1)

空間内の曲面は、 v と u の二つの変数で表わせる。



$$\overrightarrow{PP_1} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \Delta u \quad \overrightarrow{PP_2} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \Delta v$$

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v)$$

$$\vec{r} = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x(u, v)}{\partial u}, \frac{\partial y(u, v)}{\partial u}, \frac{\partial z(u, v)}{\partial u} \right)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x(u, v)}{\partial v}, \frac{\partial y(u, v)}{\partial v}, \frac{\partial z(u, v)}{\partial v} \right)$$

$$\Delta S \doteq \left| \overrightarrow{PP_1} \times \overrightarrow{PP_2} \right| \quad \Delta S \doteq \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| \Delta u \Delta v$$

曲面の面積 (2)

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \right) i + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right) j + \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) k$$



$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} i + \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} k$$



$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} i + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} j + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} k$$



$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

外積が、行列式を用いて表せる。

関数行列式で表せる。



$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \right)$$

曲面の面積 (3)

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|^2 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right|^2 \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|^2 \sin^2 \theta$$

$$E = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right|^2 \quad F = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) \quad G = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|^2$$

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|^2 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right|^2 \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|^2 (1 - \cos^2 \theta)$$

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| = \sqrt{E \cdot G - F^2}$$

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|^2 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right|^2 \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|^2 - \left(\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right| \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| \cos \theta \right)^2$$

$$\Delta S \doteq \sqrt{E \cdot G - F^2} \Delta u \Delta v$$

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|^2 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right|^2 \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|^2 - \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right)^2$$

$$S = \iint \sqrt{E \cdot G - F^2} \Delta u \Delta v$$

球面の面積（１）

半径 r の球面の表面積を求める。 θ と φ の二変数で球面は表される。

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = r \cos \theta \cos \varphi$$

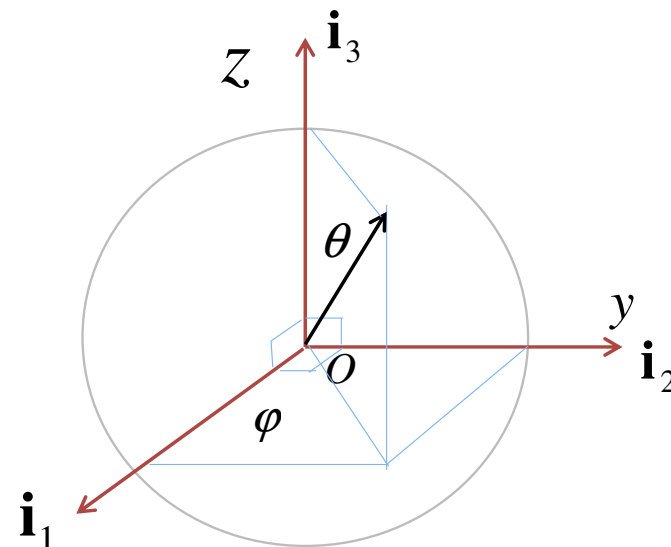
$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta \sin \varphi$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = -r \sin \theta$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r \sin \theta \sin \varphi$$

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0$$



$$E = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right|^2 = r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta = r^2 \cos^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + r^2 \sin^2 \theta = r^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = r^2$$

$$G = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right|^2 = r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi = r^2 \sin^2 \theta (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = r^2 \sin^2 \theta$$

$$F = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right) = -r^2 \cos \theta \cos \varphi \sin \theta \sin \varphi + r^2 \cos \theta \sin \varphi \sin \theta \cos \varphi = 0$$

球面の面積 (2)

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| = \sqrt{E \cdot G - F^2}$$

$$= \sqrt{r^2 \cdot r^2 \sin^2 \theta - 0^2} = r^2 \sin \theta$$

$$S = \iint \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| d\theta d\varphi$$

$$S = \iint \sqrt{E \cdot G - F^2} d\theta d\varphi$$

$$S = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$S = r^2 \int_0^{2\pi} [-\cos \theta]_0^\pi d\varphi = r^2 \int_0^{2\pi} [-\cos \pi + \cos 0]_0^\pi d\varphi$$

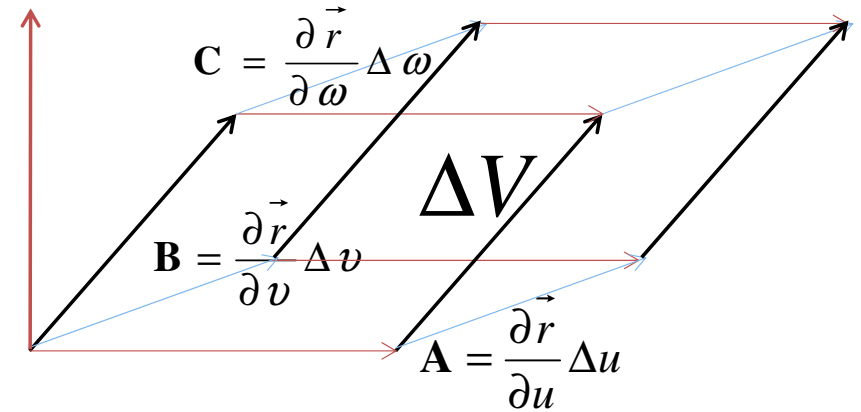
$$S = r^2 \int_0^{2\pi} 2 d\varphi = 2r^2 \int_0^{2\pi} d\varphi = 2r^2 \cdot 2\pi = 4\pi r^2$$

球の体積 (1)

$$\begin{aligned}\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= (C_1 \mathbf{i}_1 + C_2 \mathbf{i}_2 + C_3 \mathbf{i}_3) \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \\ &= C_1 \begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix} - C_2 \begin{vmatrix} A_1 & A_3 \\ B_1 & B_3 \end{vmatrix} + C_3 \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \\ \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

三重積で求められる平行6面体の体積は

$$\Delta V = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \omega} \right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) \Delta u \Delta v \Delta \omega = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \omega} & \frac{\partial y}{\partial \omega} & \frac{\partial z}{\partial \omega} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \Delta u \Delta v \Delta \omega$$



球の体積（２）

$$\Delta V = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} \Delta r \Delta \theta \Delta \varphi = \frac{\partial \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}}{\partial \begin{pmatrix} r & \theta & \varphi \end{pmatrix}} \Delta r \Delta \theta \Delta \varphi$$

行列式を用いて表せる。

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \sin \theta \cos \varphi$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin \theta \sin \varphi$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \cos \theta$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = r \cos \theta \cos \varphi$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta \sin \varphi$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = -r \sin \theta$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r \sin \theta \sin \varphi$$

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0$$

球の体積 (3)

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x \ y \ z)}{\partial(r \ \theta \ \varphi)} &= r^2 \sin^3 \theta \cos^2 \varphi + r^2 \sin^3 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2 \theta \sin \theta \\ &= r^2 \sin^3 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + r^2 \cos^2 \theta \sin \theta \\ &= r^2 \sin^3 \theta + r^2 \cos^2 \theta \sin \theta \\ &= r^2 \sin \theta (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = r^2 \sin \theta\end{aligned}$$

$$dV = \frac{\partial(x \ y \ z)}{\partial(r \ \theta \ \varphi)} dr d\theta d\varphi = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

$$\begin{aligned}V &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ &= \frac{4\pi R^3}{3}\end{aligned}$$