No.

Date 20 8 7

[ベクトルポテンシャル]

クーロン電場 $\vec{E}$ の場合

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = 0 \quad —①$$ ∴ $rot \vec{E} = 0$ となり —②

$\vec{E} = -grad\phi = -\nabla\phi$ —③ となるポテンシャルを必ずもつ。 $\underset{スカラー}{\wedge}$

定常電流 $\vec{j}$ が作る磁場の場合

$rot \vec{H} = \vec{j}$ —④ を満たす。 仮りに スカラーポテンシャル ϕ_m をもつとすれば

$$\vec{H} = -grad\phi_m = -\nabla\phi_m \quad —⑤$$

$$rot\vec{H} = -rot\ grad\phi_m = -\nabla\times\nabla\phi_m$$

$$= -\left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\left(\vec{i}\frac{\partial\phi_m}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial\phi_m}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial\phi_m}{\partial z}\right)$$

$$= 0 \quad —⑥$$

となり $rot\vec{H} = \vec{j}$ を満足しない。 磁場はスカラーポテンシャルでは表せない

非保存力のベクトル場に対して ベクトルポテンシャル $\vec{A}$ を導入する。

磁束密度 $\vec{B}$ が $\vec{B} = \mu\vec{H} = rot\vec{A}$ —⑦ の形で求められるとする。

$rot\vec{H} = \vec{j}$ より $rot\,\mu\vec{H} = \mu\vec{j}$ $rot\vec{B} = \mu\vec{j}$ —⑧ とすれば

$$rot\ rot\vec{A} = \mu\vec{j} \quad —⑨$$

$$grad\ div\vec{A} - \nabla^2\vec{A} = \mu\vec{j} \quad —⑩$$

Date 20 8 7

電場のスカラーポテンシャルの場合

$$\phi' = \phi + C \quad (C = \mathrm{const}) \quad —⑪$$

$$\nabla\phi' = \nabla\phi + \nabla\cdot C = \nabla\phi \quad —⑫$$

∴ ϕ'もϕも同じ電場を与える。

ベクトルポテンシャル $\vec{A}$の場合　ψを任意のスカラー関数とすれば

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\psi = 0 \quad —⑬$$

$\vec{A}' = \vec{A} + \mathrm{grad}\,\psi$ の場合 —⑭

$$\mathrm{rot}\,\vec{A}' = \mathrm{rot}\,\vec{A} + \mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\psi = \mathrm{rot}\,\vec{A} \quad —⑮$$

∴ $\vec{A}'$も$\vec{A}$も同じ磁場$\vec{B}$のベクトルポテンシャルとなり一意的でない。

そこで $\vec{A}$について $\mathrm{div}\,\vec{A} = 0$ を満足するという条件をつける。

$\mathrm{div}\,\vec{A}' \neq 0$ の場合

$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\psi = \mathrm{div}\,\vec{A}'$ を満足する $-\mathrm{grad}\,\psi$ を $\vec{A}'$ につけ加える

$\vec{A} = \vec{A}' - \mathrm{grad}\,\psi$ とおけば —⑯

$$\mathrm{div}\,\vec{A} = \mathrm{div}\,\vec{A}' - \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\psi = \mathrm{div}\,\vec{A}' - \mathrm{div}\,\vec{A}' = 0 \quad —⑰$$

となる。

$\mathrm{div}\,\vec{A} = 0$ のとき ⑩は

$$-\nabla^2\vec{A} = \mu\vec{j} \qquad \nabla^2\vec{A} = -\mu\vec{j} \quad —⑱$$

⑱のx成分は

$$\nabla^2 A_x = -\mu j_x \quad —⑲$$

電場のポアソン方程式より

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \text{ の解} \longrightarrow \phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\rho}{r}\,dv \quad —⑳$$

$$\nabla^2 A_x = -\mu j_x \text{ の解} \longrightarrow A_x = \frac{\mu}{4\pi}\iiint \frac{j_x}{r}\,dv \quad —㉑$$

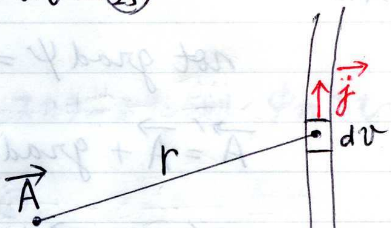
Date 20 8 7

$$A_y = \frac{\mu}{4\pi}\iiint \frac{j_y}{r}\,dv \qquad A_z = \frac{\mu}{4\pi}\iiint \frac{j_z}{r}\,dv \quad \text{—㉒}$$

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k} \quad \text{—㉓} \qquad \vec{j} = j_x\vec{i} + j_y\vec{j} + j_z\vec{k} \quad \text{—㉔}$$

$$= \frac{\mu}{4\pi}\iiint \frac{j_x\vec{i} + j_y\vec{j} + j_z\vec{k}}{r}\,dv \quad \text{—㉕}$$

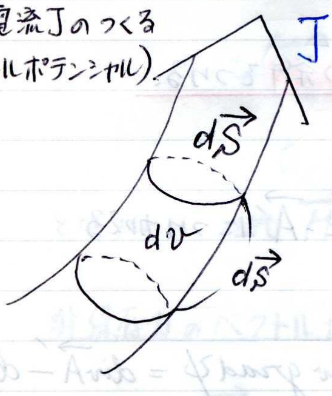
$$\boxed{\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\iiint \frac{\vec{j}}{r}\,dv \quad \text{—㉖}}$$



rは$\vec{A}$を求めている点からdvまでの距離

積分は電流の存在するところでとる。

(線状電流Jのつくるベクトルポテンシャル)



微小体積の断面積を$d\vec{S}$，微少長を$d\vec{s}$とする。

$$dv = d\vec{S}\cdot d\vec{s} \quad \text{—①}$$

断面での単位時間当りの電荷の通過量 → 電流

$$\vec{j}\,dv = \vec{j}\cdot d\vec{S}\,d\vec{s} = J\,d\vec{s} \quad \text{—②}$$

㉖より
$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\iiint \frac{\vec{j}\,dv}{r} = \frac{\mu}{4\pi}\int \frac{J}{r}\,d\vec{s} = \frac{\mu J}{4\pi}\int \frac{d\vec{s}}{r} \quad \text{—③}$$

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A} = \mathrm{rot}\left\{\frac{\mu J}{4\pi}\int \frac{d\vec{s}}{r}\right\} = \frac{\mu J}{4\pi}\int \mathrm{rot}\left(\frac{d\vec{s}}{r}\right) \quad \text{—④}$$

$$= \quad \mathrm{rot}\,\frac{d\vec{s}}{r} = \mathrm{grad}\,\frac{1}{r}\times d\vec{s} + \frac{1}{r}\,\mathrm{rot}\,d\vec{s} \quad \text{—⑤}$$

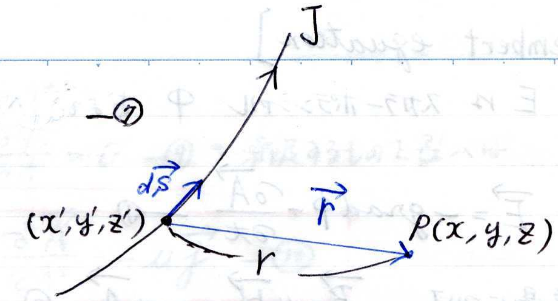
— は一定

$$= \mathrm{grad}\,\frac{1}{r}\times d\vec{s} \quad \text{—⑥}$$

Date 20 8 7

$$\mathrm{grad}\,\frac{1}{r} = -\frac{\vec{r_0}}{r^2} \quad —⑦$$

ここで $\vec{r_0} = \dfrac{\vec{r}}{r}$



$$\mathrm{rot}\,\frac{d\vec{s}}{r} = -\frac{\vec{r_0}}{r^2}\times d\vec{s} = \frac{d\vec{s}\times\vec{r_0}}{r^2} \quad —⑧$$

$$\therefore\ \vec{B} = \frac{\mu J}{4\pi}\int\frac{d\vec{s}\times\vec{r_0}}{r^2} \quad —⑨$$

$$\boxed{\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} = \frac{J}{4\pi}\int\frac{d\vec{s}\times\vec{r_0}}{r^2} \quad —⑩}$$

Biot − Savart の法則

$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ ファラデーの法則の微分形

ベクトルポテンシャル $\vec{A}$ を用いると

$\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\,\vec{A} = -\mathrm{rot}\,\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}\left(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0$$

$$\therefore\ \vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\mathrm{grad}\,\phi \quad \vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\,\phi$$

静電場は保存場で $\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\phi$ で表される.

$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\phi = 0$ であるので一般的に静電場をあわせて

$$\boxed{\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\phi - \mathrm{rot}\,\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$= 0 - \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\,\vec{A} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$$

No.

Date 20 8 7

[d'Alembert equation]

電場 E は スカラーポテンシャル ϕ および ベクトル・ポテンシャル $\vec{A}$ を用いると

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{—①}$$

磁場について $\vec{B} = \mu \vec{H} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$ —②

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{—③}$$ に代入すれば

$$\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,\vec{A}) = \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}\left\{-\varepsilon\,\mathrm{grad}\,\phi - \varepsilon\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right\}$$

$$= \vec{j} - \varepsilon\,\mathrm{grad}\frac{\partial \phi}{\partial t} - \varepsilon\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \quad \text{—④}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} = \mu\vec{j} - \mu\varepsilon\,\mathrm{grad}\frac{\partial \phi}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

$$\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{A} - \nabla^2\vec{A} = \mu\vec{j} - \mu\varepsilon\,\mathrm{grad}\frac{\partial \phi}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

$$\mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\,\vec{A} + \mu\varepsilon\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) + \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2\vec{A} = \mu\vec{j}$$

$$\nabla^2\vec{A} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\,\vec{A} + \mu\varepsilon\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = -\mu\vec{j} \quad \text{—⑤}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$ に代入すると —⑥

$$\mathrm{div}\left(-\mathrm{grad}\,\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad \text{—⑦}$$

$$-\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\phi - \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\,\vec{A} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$-\nabla^2\phi - \frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\,\vec{A}) = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\nabla^2\phi + \frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\,\vec{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad \text{—⑧}$$

⑤ ⑧ を満足する $\vec{A}$ ϕ の解のうちで

$\mathrm{div}\vec{A} + \mu\varepsilon\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$ —⑨ を満足するものを選べば

⑤ は $$\boxed{\nabla^2\vec{A} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{j} \quad \text{—⑩}}$$

⑧ は $$\nabla^2\phi + \frac{\partial}{\partial t}\left(-\mu\varepsilon\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\boxed{\nabla^2\phi - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad \text{—⑪}}$$

⑩ ⑪ を d'Alembert quation という。

さらに ⑨ を Lorentz 条件という。